



I113 オートマトンと形式言語

レポート(4)と(5)の解説

TA 寺本 幸生



レポート(4) 問題1

CFG G を次のように定義する:

$$G = (\{P\}, \{(\, , \,)\}, P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon, P).$$

また、言語 L_B を次のように定義する:

$$L_B = \{w \mid w \in \{(\, , \,)\}^*, w \text{ はバランスの取れたカッコの列}\}.$$

問題1.1

$L_B = L(G)$ を証明せよ。

ヒント: $L_B \subseteq L(G)$ と $L(G) \subseteq L_B$ を両方とも証明しなければならない点に注意せよ。

Report (4) Problem 1

Let G be a CFG defined by

$$G = (\{P\}, \{(\,)\}, P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon, P).$$

Let L_B be a language defined by

$$L_B = \{w \mid w \in \{(\,)\}^*, w \text{ consists of balanced parentheses}\}.$$

Problem 1.1:

Prove $L_B = L(G)$.

Hint: You have to prove both of $L_B \subseteq L(G)$ and $L(G) \subseteq L_B$.

レポート(4) 問題1.1 解答例

$$L_B \subseteq L(G)$$

$$w = \varepsilon \rightarrow |w| = 0$$

$$w = () \rightarrow |w| = 1$$

任意の $w \in L_B$ について、 $w \in L(G)$ を示す。

- w の中のカッコのペアの個数を $|w|$ で表す。

i) $|w| = 0$ のとき $P \rightarrow \varepsilon$ より OK!

ii) $|w| > 0$ のとき $|w'| < |w|$ を満たす任意の w' に対して $w' \in L(G)$ とする。

ここで、 w はバランスの取れたカッコ列なので $w = (w_1)w_2$ を満たす、 w_1 と w_2 が存在する。ここで、 $|w_1|, |w_2| < |w|$ 。



帰納法の仮定より、 $P \xrightarrow{*} w_1$ & $P \xrightarrow{*} w_2$

ここで、 $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P$ であることから、

$P \rightarrow PP \rightarrow (P)P \xrightarrow{*} (w_1)w_2 = w$ となる。よって $w \in L(G)$ 。



Report(4) Problem 1.1 [Answer]

$$L_B \subseteq L(G)$$

$$w = \varepsilon \rightarrow |w| = 0$$

$$w = () \rightarrow |w| = 1$$

For any $w \in L_B$, we show $w \in L(G)$.

- Let $|\cdot|$ be the number of appropriate pairs of parentheses.

i) If $|w| = 0$, then **true** from $P \rightarrow \varepsilon$.

ii) We let assume that

if $|w| > 0$, $w' \in L(G)$ for any words w' satisfying $|w'| < |w|$.

We note that w can be written as $w = (w_1)w_2$, where w_1 and w_2 are balanced one, since w is balanced. In fact, $|w_1|, |w_2| < |w|$.



By the induction hypothesis, $P \xrightarrow{*} w_1$ & $P \xrightarrow{*} w_2$

Applying rules as follows $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P$,

we can say $P \rightarrow PP \rightarrow (P)P \xrightarrow{*} (w_1)w_2 = w$. Hence $w \in L(G)$.

レポート(4) 問題1.1 解答例

$$L(G) \subseteq L_B$$

Gの文法では、いつでも(と)がペアで生成される。
しかも正しい順序で! (が左で)が右。



従って、バランスのとれたカッコ列しか生成しない。



$$L(G) \subseteq L_B$$



(証明終了)

Report(4) Problem1.1 [Answer]

$$L(G) \subseteq L_B$$

From rules of G , (and) are always generated as a pair
with (is left and) is right!



Hence, G never generates unbalanced parentheses!



$$L(G) \subseteq L_B$$



q.e.d

レポート(4) 問題1.2

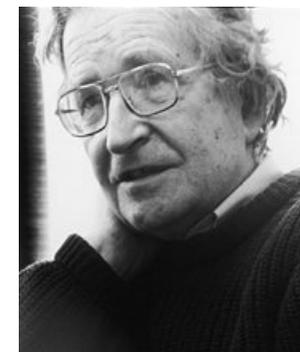
問題1.2

G をもとにして、 $L(G_C) = L(G) - \{\varepsilon\}$ を満たす Chomsky 標準形の CFG G_C を構成せよ。

Chomsky の標準形

すべての規則が、

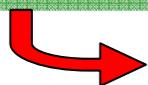
1. $A \rightarrow BC$
2. $A \rightarrow a$



Noam Chomsky

基本戦略

1. ε をとりのぞく
2. 単位規則をとりのぞく
3. 無用な生成規則をとりのぞく



それから Chomsky 標準形になるように規則を修正する。

Report(4) Problem1.2

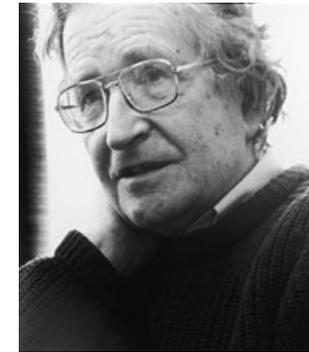
Problem 1.2

Construct the CFG G_C in **Chomsky normal form** with $L(G_C) = L(G) - \{\varepsilon\}$ based on G .

Chomsky normal form

Each rule is either of

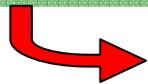
1. $A \rightarrow BC$, or
2. $A \rightarrow a$



Noam Chomsky

Elemental steps

1. Remove ε -productions.
2. Remove unit productions.
3. Remove useless symbols.



Then, refine the grammar with Chomsky normal form.

レポート(4) 問題1.2 解答例

G の生成規則

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon$$

1. ε をとりのぞく

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon \xrightarrow{\text{red}} P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP$$

(P)より PPより



2. 単位規則をとりのぞく

$$P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \xrightarrow{\text{red}} P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$$

P→Pはそのままのぞける

3. 無用な生成規則をとりのぞく

3. は OK



Report(4) Problem1.2 [answer]

The production rules in G

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon$$

1. Remove ε -productions

$$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon \quad \longrightarrow \quad P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP$$

by (P) by PP



2. Remove unit productions

$$P \rightarrow () \mid (P) \mid P \mid PP \quad \longrightarrow \quad P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$$

$P \rightarrow P$ can be removed easily.

3. Remove useless symbols

OK!!



レポート(4) 問題1.2 解答例

G の生成規則

$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$

☆ 非終端記号の導入

$P \rightarrow () \mid (P) \mid PP \xrightarrow{\begin{array}{l} L \rightarrow (\\ R \rightarrow) \end{array}} P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP$

$P \rightarrow LPR$ がまだダメ。

$P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP \xrightarrow{\begin{array}{l} P \rightarrow LA \\ A \rightarrow PR \end{array}} P \rightarrow LR \mid PP$
 $L \rightarrow ($
 $R \rightarrow)$ **OK**

まとめると

$G_C = (\{P, L, R, A\}, \{(,)\}, P \rightarrow LR \mid LA \mid PP,$
 $A \rightarrow PR, L \rightarrow (, R \rightarrow), P)$



Report(4) Problem1.2 [answer]

The production rules in G

$P \rightarrow (P) \mid PP \mid \varepsilon \rightarrow P \rightarrow () \mid (P) \mid PP$

☆ Introducing non-terminal symbols

$P \rightarrow () \mid (P) \mid PP \xrightarrow{\quad} P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP$
 $L \rightarrow ($
 $R \rightarrow)$

$P \rightarrow LPR$ is bad!

$P \rightarrow LR \mid LPR \mid PP \xrightarrow{\quad} P \rightarrow LR \mid LA \mid PP$
 $L \rightarrow ($
 $R \rightarrow)$
 $A \rightarrow PR$
OK

Summing up,

$G_C = (\{P, L, R, A\}, \{(,)\}, P \rightarrow LR \mid LA \mid PP,$
 $A \rightarrow PR, L \rightarrow (, R \rightarrow), P)$



レポート(5) 問題1

$\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語 L を次のように定義する:

$$L = \{0^n 1^m \mid n > m > 1\}.$$



L を受理する TM M を以下の手順で構成せよ。

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

構成手順を鑑みて $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$ でも良いこととする。

Report(5) Problem1

Let L be the language over $\Sigma=\{0, 1\}$ defined by

$$L = \{0^n 1^m \mid n > m > 1\}.$$



Construct a TM M that accepts L as follows.

1. Design TM M_1 for checking **whether $\lceil w = 00^*11^* \rceil$** .
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M.

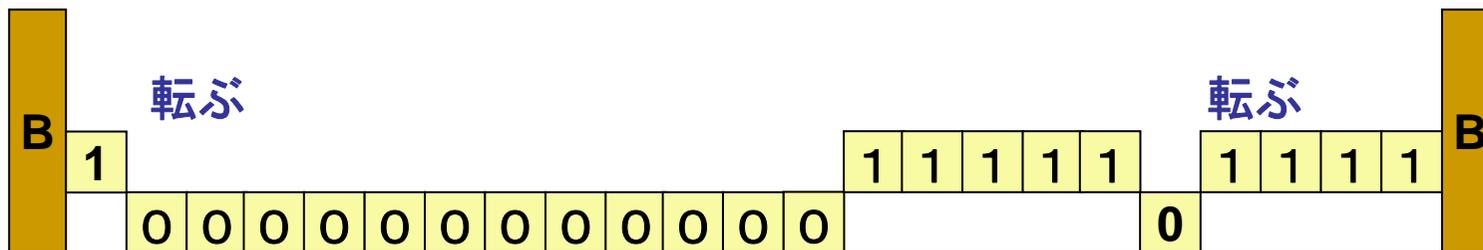
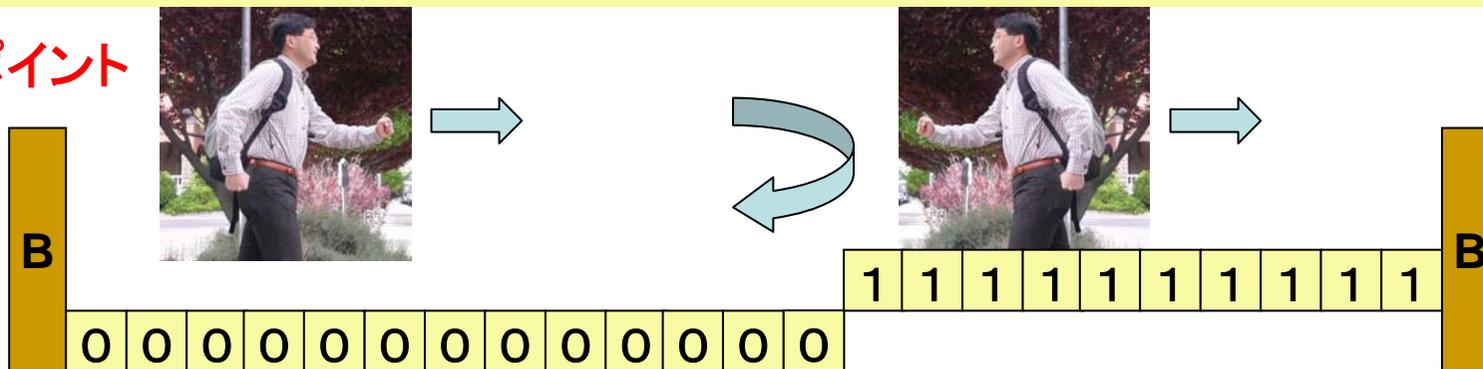
Considering problem 1.1,

we may be allowed to answer in which $L = \{0^n 1^m \mid n > m \geq 0\}$.

レポート(5) 問題1.1 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

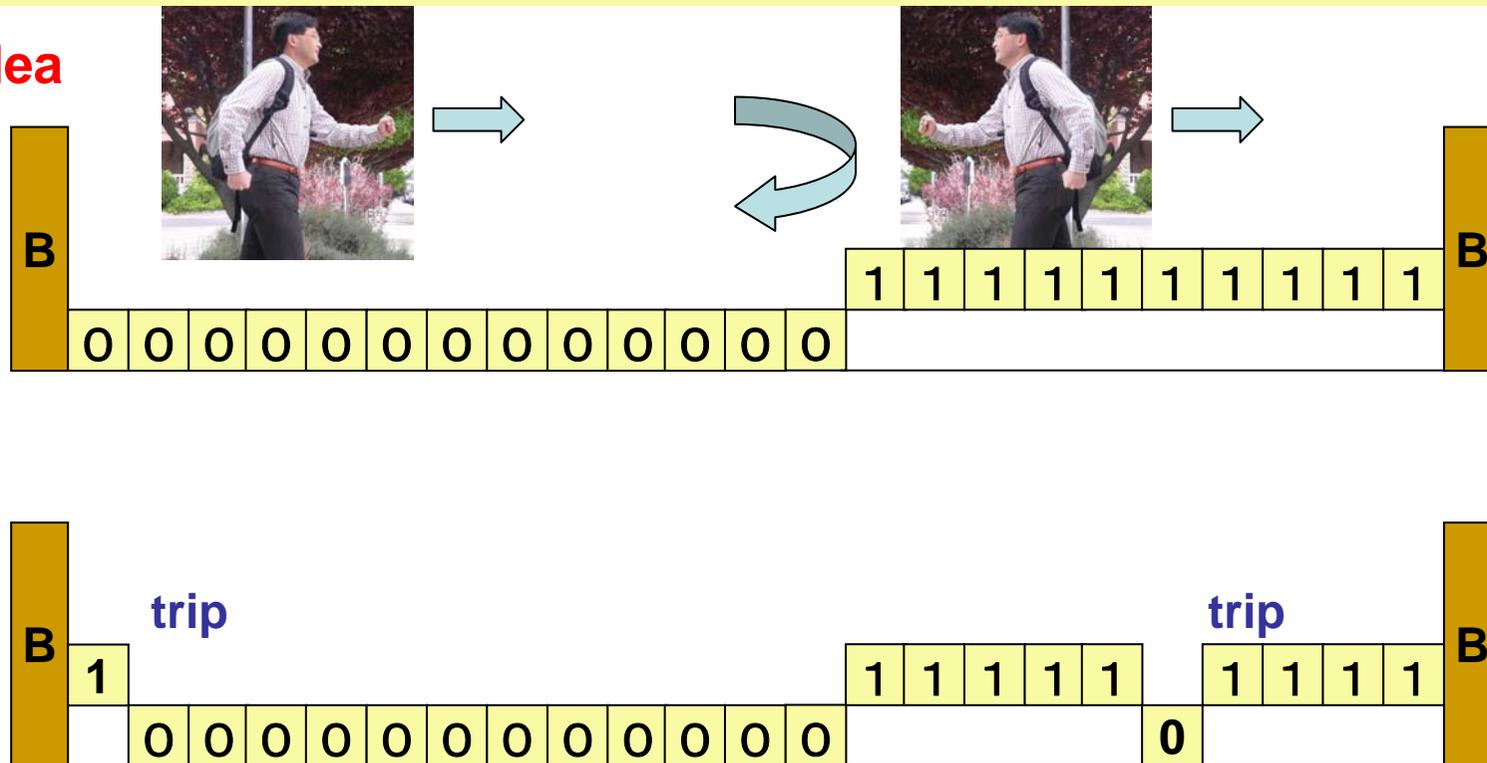
☆ ポイント



Report(5) Problem1.1 [answer]

1. Design TM M_1 for checking whether $w = 00^*11^*$.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

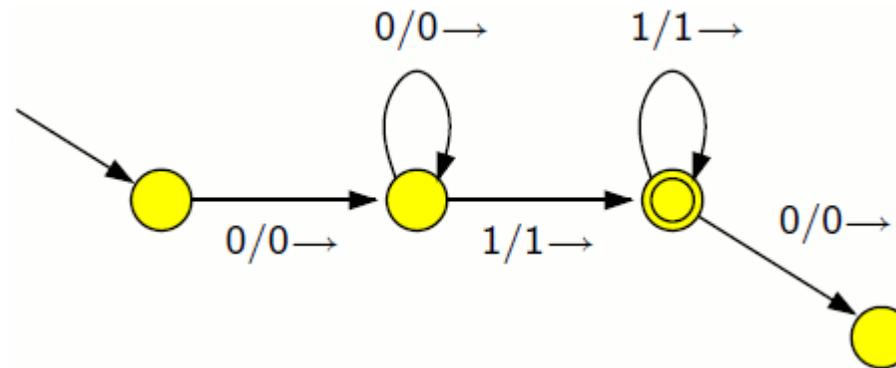
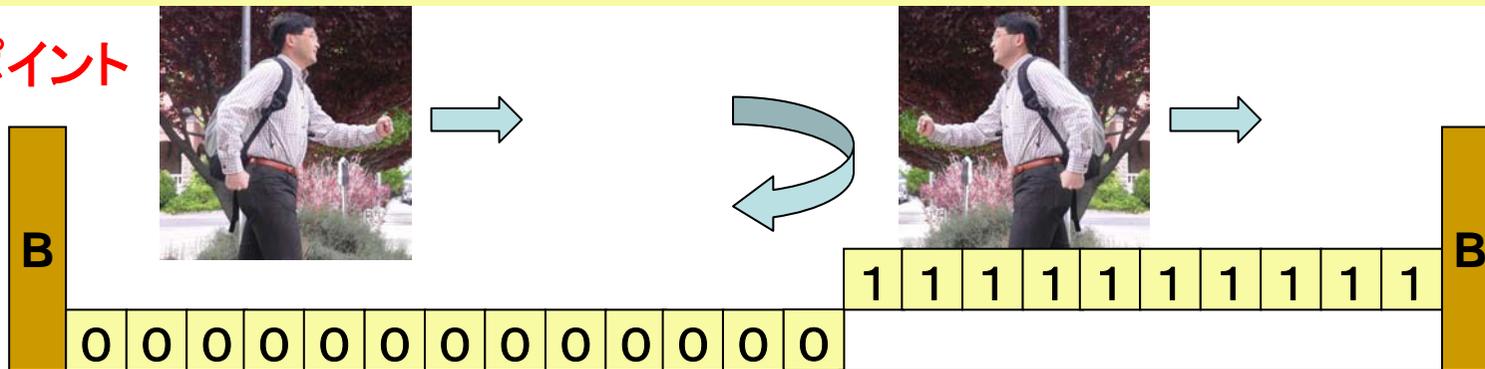
★ idea



レポート(5) 問題1.1 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

☆ ポイント

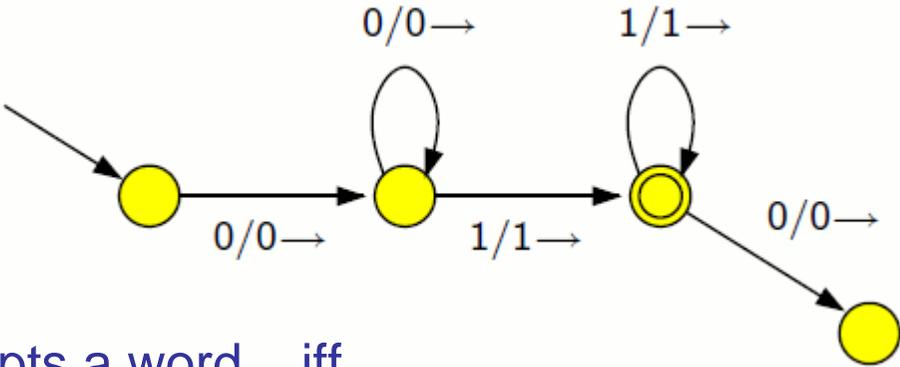
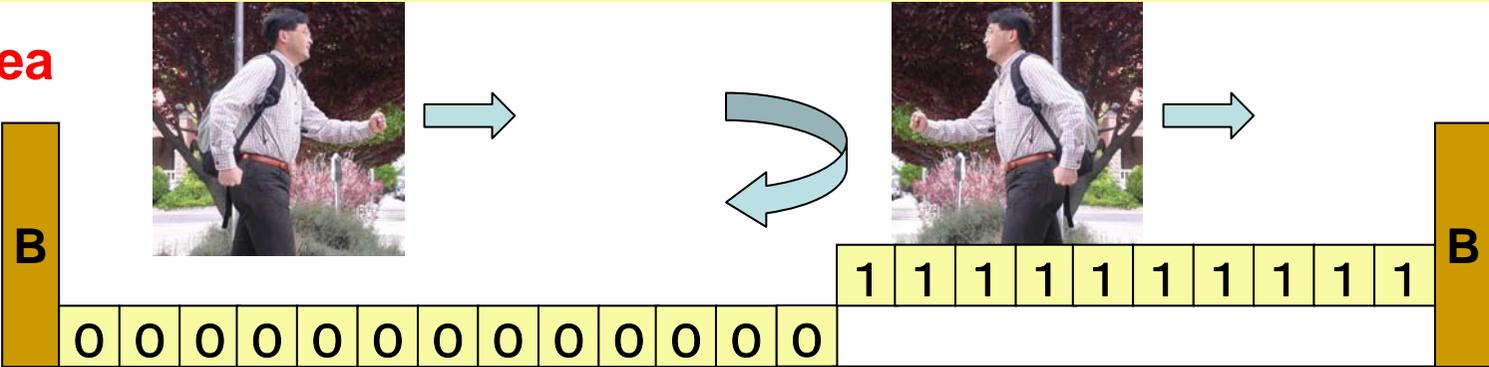


TM が停止したときに受理状態にあれば良いとする。😊

Report(5) Problem1.1 [answer]

1. Design TM M_1 for checking whether $w = 00^*11^*$.
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

★ idea



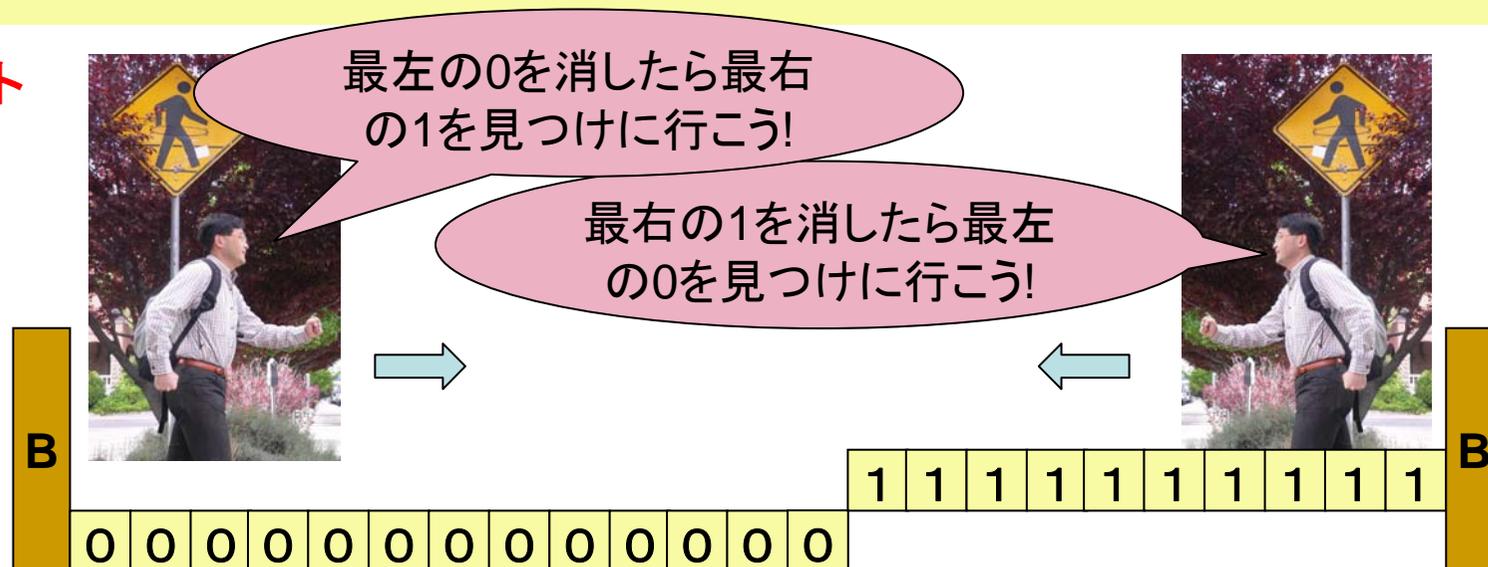
M_1 accepts a word iff M_1 's state is in accepted ones, when M_1 terminates.



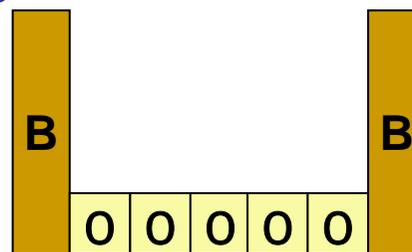
レポート(5) 問題1.2 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計

☆ ポイント



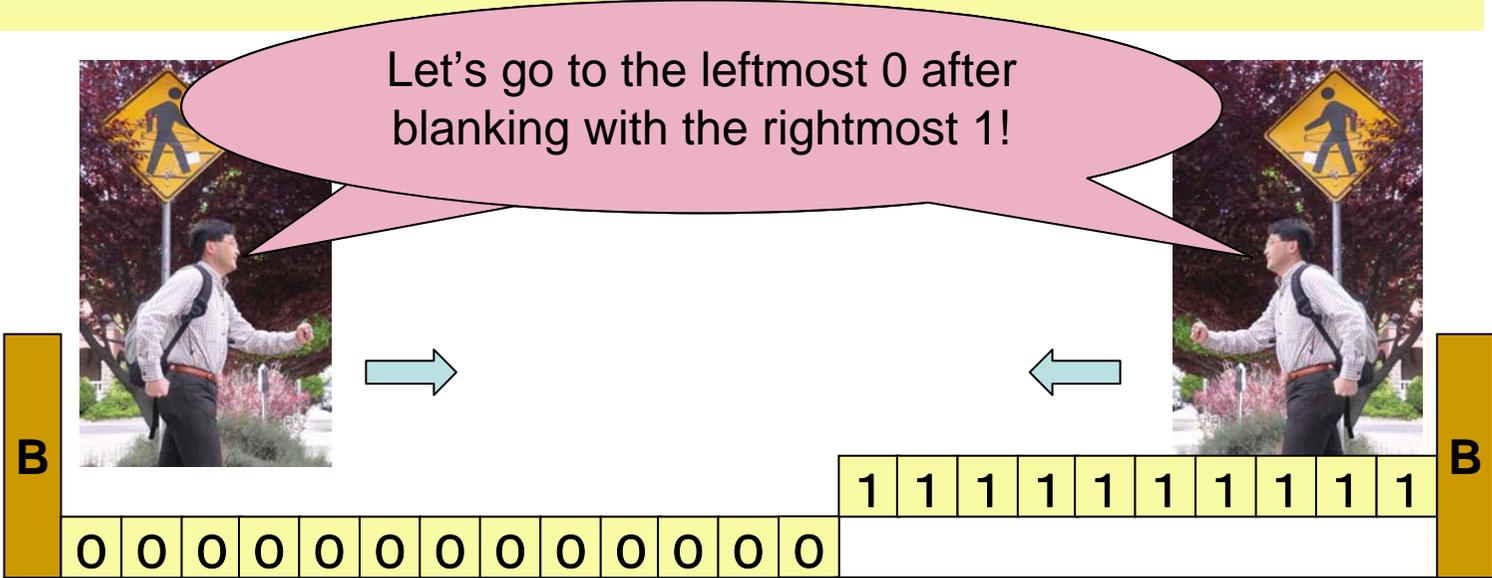
最終的に次のようになったらHappy!



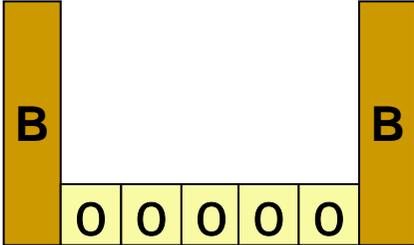
Report(5) Problem1.2

1. Design TM M_1 for checking **whether $\lceil w = 00^*11^* \rceil$** .
2. **For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.**
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .

★ idea

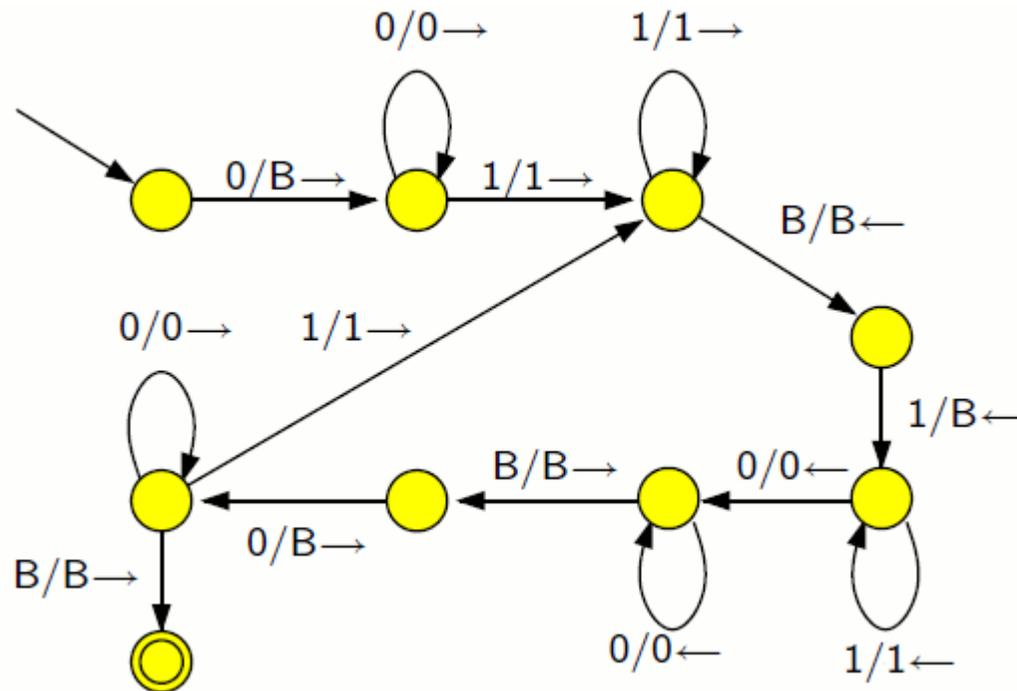


Finally, following case will leads to be happy!



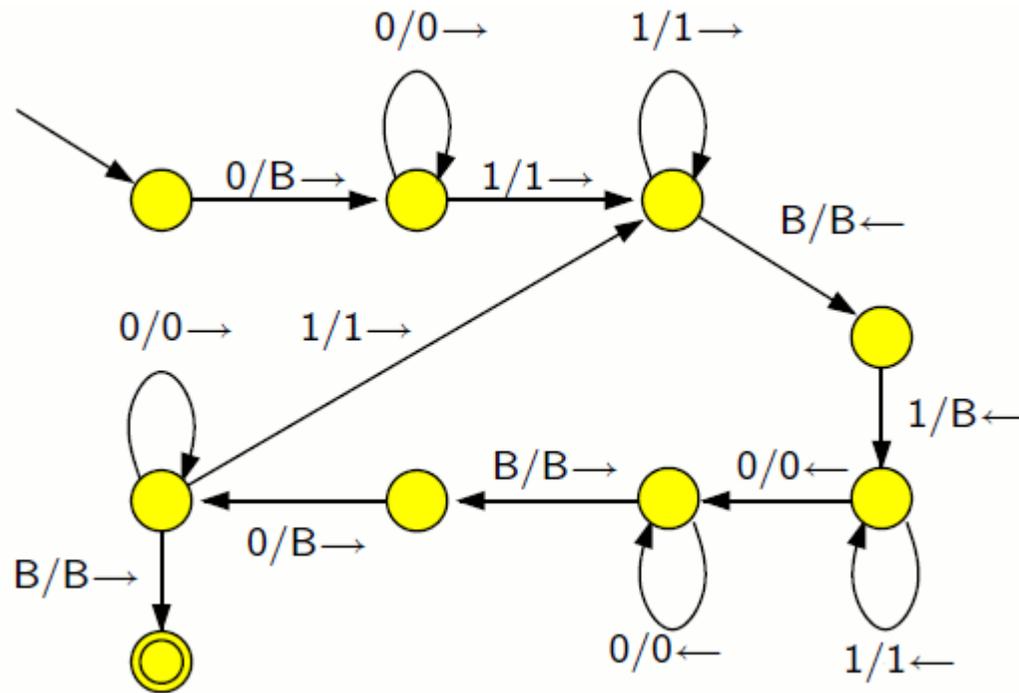
レポート(5) 問題1.2 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計



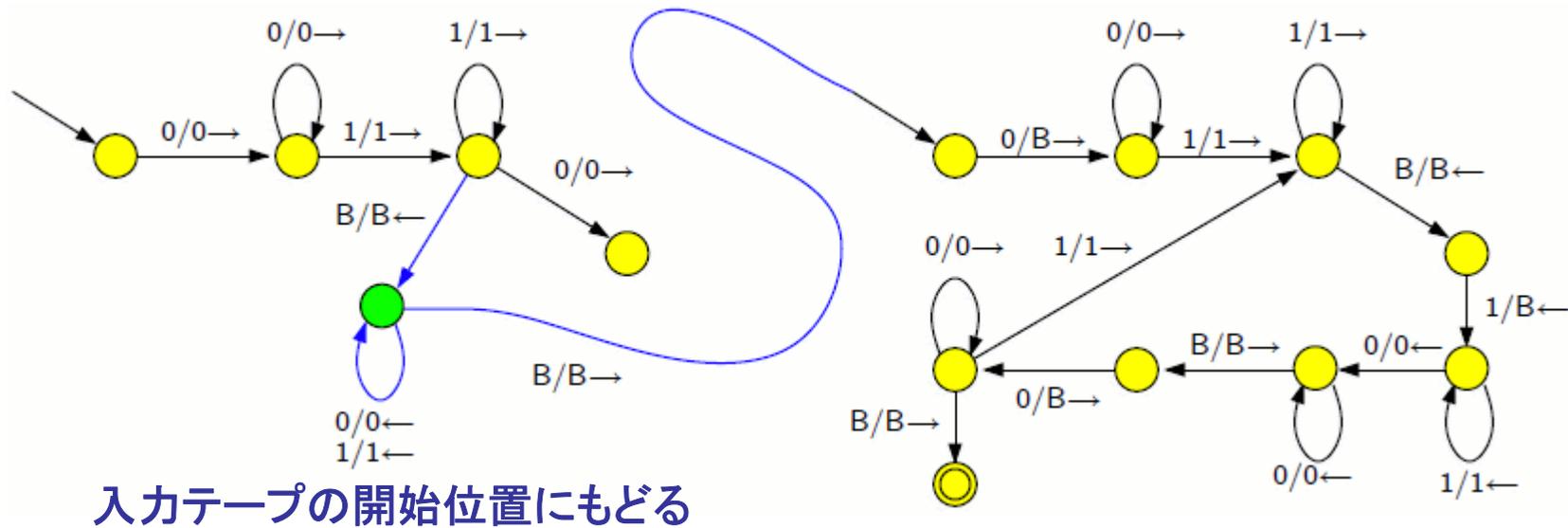
Report(5) Problem1.2 [answer]

1. Design TM M_1 for checking **whether $w = 00^*11^*$** .
2. **For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.**
3. From TMs M_1 and M_2 , construct M .



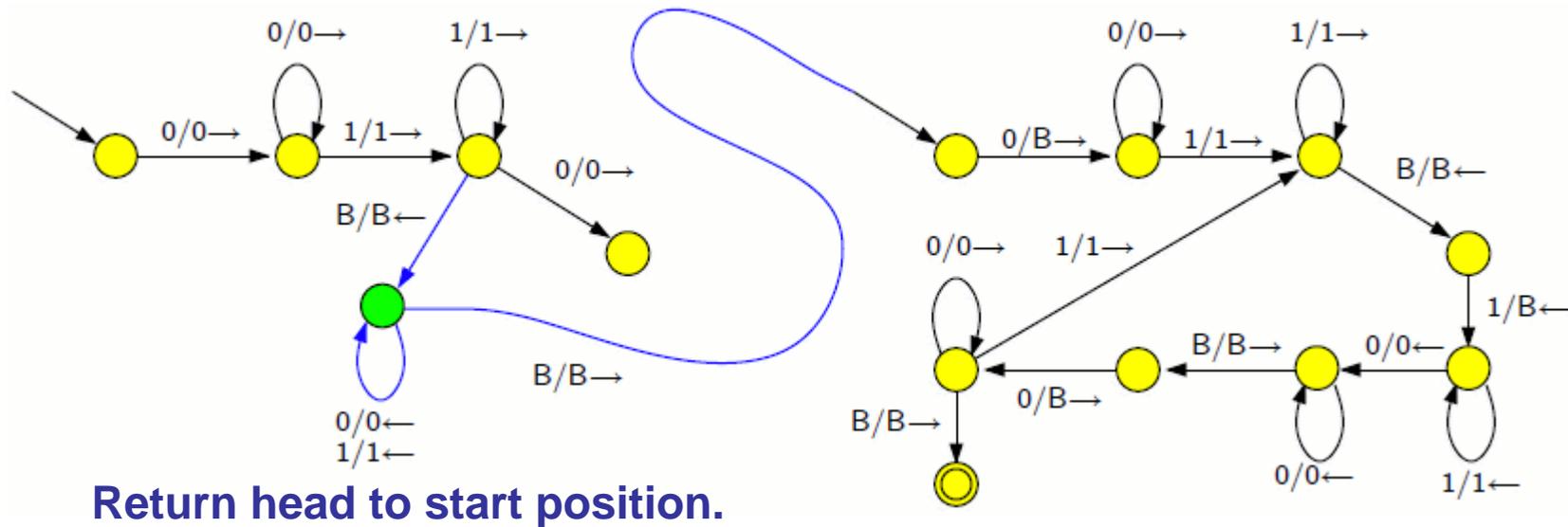
レポート(5) 問題1.3 解答例

1. 文法チェック用TM M_1 の設計 (「 $w = 00^*11^*$ 」かどうかの判定)
2. $w \in L(M_1)$ に対して $w \in L$ かどうかの判定を行う TM M_2 の設計
3. M_1 と M_2 を参考に M を設計



Report(5) Problem1.2 [answer]

1. Design TM M_1 for checking **whether $\lceil w = 00^*11^* \rceil$** .
2. For $w \in L(M_1)$, design TM M_2 for determining whether $w \in L$.
3. **From TMs M_1 and M_2 , construct M .**



Return head to start position.

