

I118 グラフとオートマトン理論 Graphs and Automata

担当: 上原 隆平 (Ryuhei UEHARA)

uehara@jaist.ac.jp

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/>

1/12

5. 集合と計数 (Set and Counting)

2/12

5.1 基本公式

$$1. |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$2. |A \times B| = |A| \times |B|$$

$$3. |2^A| = 2^{|A|}$$

3/12

[参考] 包除原理 (inclusion exclusion principle)

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &\quad + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

4/12

5.2 数え上げ

- ボール投げの問題 (balls and bins) を題材とする
 - 占有問題 (occupancy problem) と呼ばれ、応用上きわめて重要
- ボールの数 (# of balls) ... n 個
- 箱の数 (# of bins) ... k 個

5/12

例1

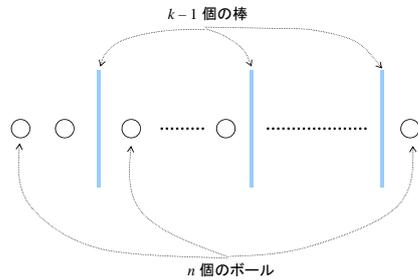
- n 個の区別できないボールを、1から k まで番号付けられた箱に入れる方法は何通りあるか ($k \leq n$). ただし、空箱は許さないものとする.

- 答

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

6/12

例1の解説



$n-1$ 個のすきまに、 $k-1$ 個の棒を入れる場合の数と同じ

7/12

例2

- 1から n まで番号付けられたボールを、 k 個の区別できない箱に入れる方法は何通りあるか ($k \leq n$). ただし、空箱は許さないものとする.

$S_k^n \dots$ (第2種の)スターリング数

- 答
 - $k=1, k=n$ のとき $S_1^n = S_n^n = 1$
 - $1 < k < n$ のとき

$$S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + kS_k^{n-1}$$

(n 番のボールが1つだけ)
+
(n 番のボールが他と同じ)

例3

- ボールにも箱にも番号が付いていない場合は?
ただし、 $k \leq n$ で、空箱は許さない.

$P_k^n \dots n$ の k 部分への分割数, partition

- P_k^n は、
 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$
を満たす整数列 (n_1, n_2, \dots, n_k) の総数
ただし、 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$

$n > k$ なら
 $P_k^n = 0$

- 答
 - $k=1, k=n$ のとき $P_1^n = P_n^n = 1$
 - $n > k$ のときは、

$$P_k^n = P_1^{n-k} + P_2^{n-k} + \dots + P_k^{n-k}$$

はじめに k 個のボールを一つづつ k 個の箱に入れておく。
あとは残りの $n-k$ 個のボールを
• 1個の箱に入れる場合
...
• k 個の箱に入れる場合
を考える。

例4

- 最後のケース. ボールも箱も区別できる場合は?
ただし、空箱は許さない.

- 答. S_k^n を使えば簡単. $k!S_k^n$

演習: 例1に $n!$ をかけるのはなぜか? だめならなぜか?

10/12

より進んだ話題...

- それぞれの問題で空き箱を許したケースは、より難しい(場合もある).

- 例えば例1 (n 個の区別できないボールを k 個の番号付けられたビンに入れる場合) で空き箱を許した場合は

$$\binom{n+k-1}{k}$$

通り。

11/12

おまけ

- こうした数列の解析には
 - 母関数(generating function)
 - たたみ込み(convolution)
 と呼ばれるテクニックが有効。

「理系にとって最強の萌え!」
だそうです。

間違いなくバイブル



12/12