I431 アルゴリズム論 Report (1)

2016 年度 2-1(10 月–11 月) 上原 隆平 (uehara@jaist.ac.jp)

出題 (Propose): 10 月 21 日 (金)

提出 (Deadline): 10 月 28 日 (金) 12:30

注意 (Note): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて書くこと．紙は A4 で左上をホチキス止めすること．片面使用でも両面使用でもよい．(Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. The size of paper is A4, and staple them at the top left. You can use one side or both sides of paper.)

以下の問題から合計 15 点以上になるように選んで解け．(Choose and solve some problems from below which make 15 points or more in total.)

Problem 1 (5pts): コインが 50 円，10 円，5 円，1 円とあったとき，貪欲法で支払うと，支払うコインの枚数が最小になることを証明せよ．(Assume that we have coins of 50yen, 10yen, 5yen, and 1yen, and use greedy algorithm to pay. Then prove that the number of coins is minimized by the algorithm.)

Problem 2 (5pts): コインが 50 円，**30 円**，10 円，5 円，1 円とあったとき，貪欲法で支払うと，支払うコインの枚数が最小になるかどうかを考えよ．最小になる場合はそれを証明し，最小にならない場合は反例を示せ．(Assume that we have coins of 50yen, **30yen**, 10yen, 5yen, and 1yen, and use greedy algorithm to pay. Then consider if the greedy algorithm achieves the minimum number of coins. Prove that if it use the minimum number of coins, or show a counterexample.)

Problem 3 (5pts): 問題のサイズ n に対して $O(n^2)$ 時間で計算するアルゴリズムがあったとき，問題のサイズが n の r 倍 ($r > 1$) になると，全体の実行時間はどうなるか？(Suppose that there is an algorithm that runs in $O(n^2)$ time. Estimate its computational complexity when the size of input is r times larger than n.)

Problem 4 (10pts): 配列 $a[0], \ldots, a[n-1]$ が与えられたとき，次の条件を満たす添字の列 $(i_0, i_1, \ldots, i_{k-1})$ を「長さ k の単調非減少列」と呼ぶ．(For a given array $a[0], \ldots, a[n-1]$, the sequence $(i_0, i_1, \ldots, i_{k-1})$ of indices is called a *monotone nondecreasing sequence.*)

- $i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1}$
- $a[i_0] \leq a[i_1] \leq \cdots \leq a[i_{k-1}]$

与えられた配列 $a[]$ の中で，最長の単調非減少列を見つけるアルゴリズムを設計し，その実行時間を解析せよ．(For any given array $a[]$, design an algoithm that finds the maximum monotone nondecreasing sequence, and analyse its time complexity.)

Problem 5 (10pts): i 番目のフィボナッチ数 F_i は，次のように定義される．(The ith Fibonacci number F_i is defined as follows:)

- $F_0 = F_1 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ for $i > 1$

一般の F_n を計算する効率のよいアルゴリズムを設計し，その実行時間を示せ．(Design an efficient algorithm for computing F_n and show its running time.)

Problem 6 (15pts): Problem 4 と同じ問題で，実行時間が $O(n \log n)$ もしくはそれよりも高速なアルゴリズムを示せ．(Show a fast algorithm that runs in $O(n \log n)$ time (or faster) for Problem 4.)