I216 Computational Complexity and Discrete Mathematics Report

2017, Term 1-1
Ryuhei Uehara(Room I67b, `uehara@jaist.ac.jp`)

Propose(出題): April 27 (Thu)

Deadline(提出期限): May 2 (Tue), 10:50am.

Note(注意): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を忘れずに書くこと．電子メールで PDF ファイルを送ってくれてもよい．Word ファイルは不可．締切は厳守．解答は日本語でも英語でもよい．(Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. You can send your report by email in PDF file format. The report in Word file format is not accepted. Deadline is strict. You can answer in English or Japanese.)

Problem 1: 以下の Problem 1.1∼1.3 から 1 問選んで答えよ (10 点)．(Answer one of the following three problems 1.1∼1.3 (10pts).)

Problem 1.1: $X_1, X_2, \ldots$ をチューリングマシンとし，$x_1, x_2, \ldots$ を対応する 2 進文字列とする．(つまり x_i はチューリングマシン X_i を 2 進文字列で記述したものである．) X_i に 2 進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする．二つの文字列 x と y に対し，これらの連接を $x \cdot y$ と書く（例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である）．ここで次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot X_i(x_i) & X_i \text{ に入力 } x = x_i \text{ を与えたら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f が計算不能であることを証明せよ．(Let $X_1, X_2, \ldots$ be the Turing machines, and $x_1, x_2, \ldots$ are the corresponding binary string. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i.) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$. For two strings x and y, their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable.)

Problem 1.2: 自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ．(The set N of natural numbers is countable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* countable by diagonalization.) (Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 1.3: 2 回目の授業で使ったスライドの中で「実数全体の集合 R は非可算である」という定理の証明を行った．この中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると，一見「有理数全体の集合 R' は非可算である」という定理の証明になる．しかし有理数は可算である．証明のどこが間違っているか，指摘せよ．(In one slide of the second lecture, we prove the theorem that claims “The set R of all real numbers is not countable.” Now let replace every “real” by “rational”. Then it seems that we prove the theorem that claims “The set R' of all rational numbers is not countable.” But, the set of all rational numbers is countable. Point out where is wrong.)

Problem 2: 以下の Problem 2.1, 2.2 から 1 問選んで答えよ (10 点)．(Answer one of the following two problems 2.1 and 2.2 (10pts).)

Problem 2.1: 以下の式は正しいか．正しければ証明し，間違っていれば反証せよ．必要ならロピタルの定理を使ってもよい．(Determine if each of the following equations is correct or wrong. If it is correnct, prove it. If it is wrong, disprove it. You can use l'Hospital's rule if you need it.)

1. $3n^3 + 4n^2 = O(n^2 + n)$
2. $3n^2 + 3n = O(n^8 + 2)$
3. $n = O(\log n)$
4. $n^8 = O(2^n)$

Problem 2.2: 時間計算量の定義の中では「最悪の場合の実行時間」を想定している．入力が一様分布で与えられると仮定してよいとき,「平均の場合の実行時間」を想定した平均時間計算量を定義せよ．(In the definition of time complexity, we estimate running time under the assumption of "the worst case." If we can assume that an input is given uniformly at random, define "the average case time complexity" under the assumption.)