I216E Computational Complexity and Discrete Mathematics

by
Prof. Ryuhei Uehara
and
Prof. Eiichiro Fujisaki

I216E 計算量の理論と離散数学

上原隆平&藤崎英一郎

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

There are two ways to prove (NP-)completeness:

1. show 'for all L' according to the definition
   - Cook's Theorem; he simulated Turing machine by SAT in 1971!

Easy to handle since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
   →pretty complicated and tedious

2. use some known complete problem as a seed
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, $\boxed{\text{3SAT} \leq_m^P \text{VC},}$ …
   - Thousands of NP-complete problems are reduced from 3SAT!
   - E.g., from "DHAM is NP-complete for general graphs", we have
     - DHAM is NP-complete even for planar graphs
     - DHAM is NP-complete even for graphs with max degree=3
     - DHAM is NP-complete even for bipartite graphs…

max degree=5

6.多項式時間計算可能性の解析

6.2.完全性

(NP)完全性を示す二つの方法:

1. 定義に忠実に「すべてのL'」に対して示す
   - クックの定理; 彼は1971年にSATでチューリングマシンのシミュレータを構築した！

基本的には…
1. 標準形で書かれたプログラムを
2. SATの命題論理式で模倣
   →非常に複雑＆面倒

例えば3SATは一様な構造を持っているので，扱いやすい．

2. すでに完全性が示されている問題をタネに使う
   - 3SAT$\leq_m^P$ DHAM, $\boxed{\text{3SAT} \leq_m^P \text{VC}}$, …
   - 千を超えるNP完全問題が3SATからの還元で示されている!
   - 例えば「一般のグラフ上でDHAMはNP完全」という結果から:
     - DHAMは平面グラフ上に限定してもNP完全
     - DHAMは最大次数3に限定してもNP完全
     - DHAMは二部グラフに限定してもNP完全…

最大次数5

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Theorem VC is NP-complete

[Proof] Since VC $\in$ NP, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $<G,k>$ of a graph and an integer in polynomial time such that:

There is an assignment that makes $F()=1$ $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

6. 多項式時間計算可能性の解析

6.2. 完全性

定理 VCはNP完全問題

[証明] VC ∈ NPなので3SAT$\leq_m^P$ VCを示せばよい.

与えられた論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ から以下の条件を満たすグラフと整数の組$\langle G,k \rangle$を多項式時間で構成する:

> $F()=1$ とする割当てが存在する
> ⇔G が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+,x_i^- と辺 (x_i^+,x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \lor l_{i2} \lor l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1},x_i^+) を，$\neg x_i$ なら辺(l_{i1},x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

Theorem VC is NP-complete

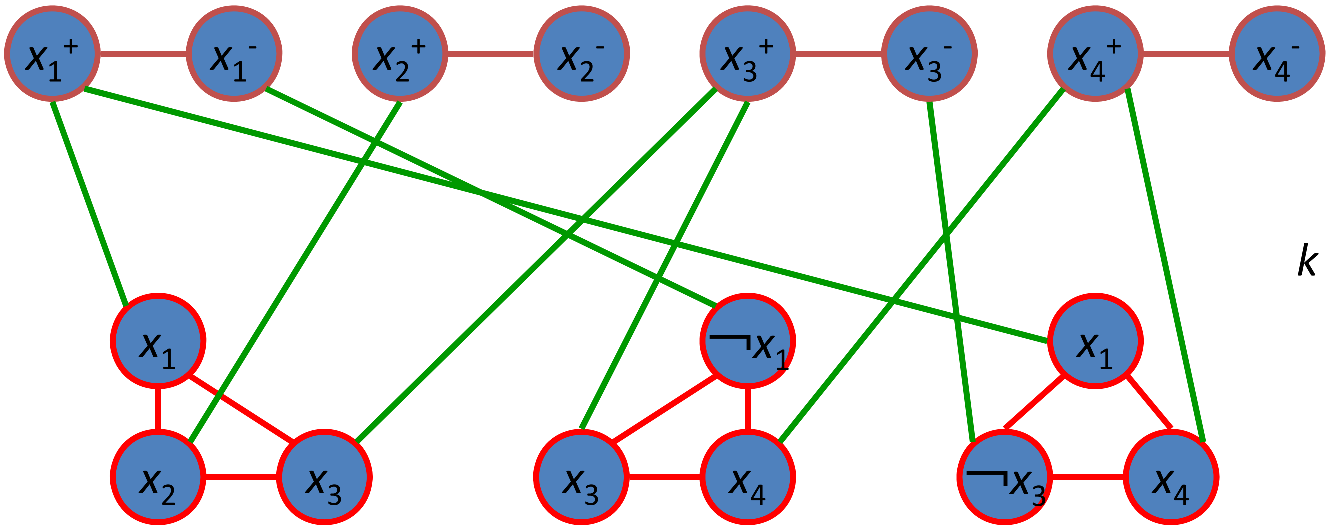
> There is an assignment that makes $F()=1$
> ⇔ G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3 = 10$

定理 VCはNP完全問題

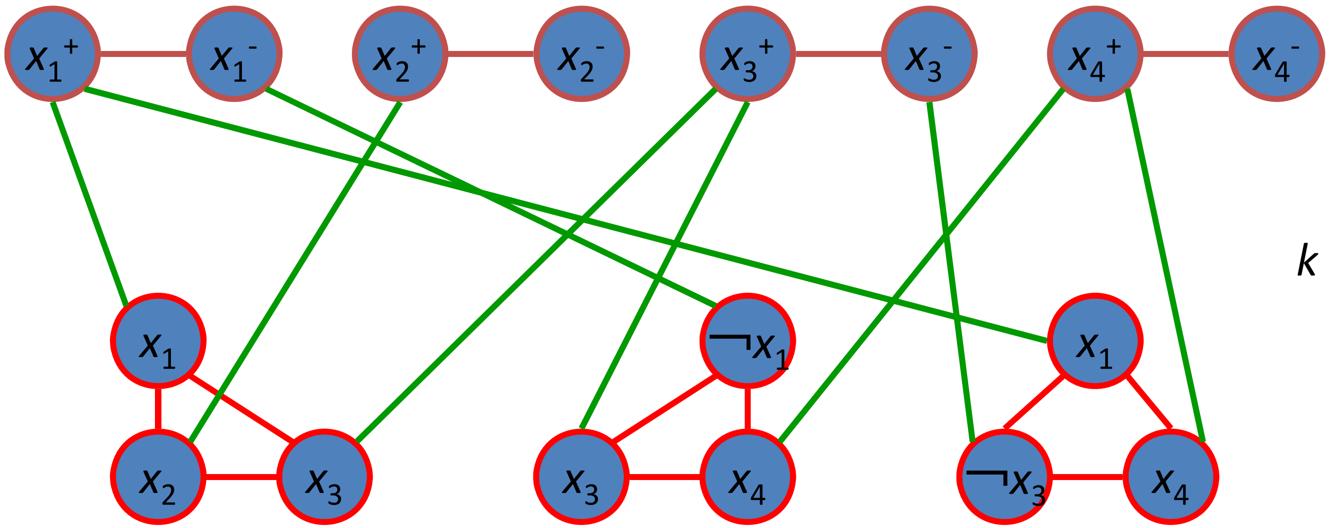
> $F()$=1 とする割当てが存在する
> ⇔G が大きさ k の頂点被覆をもつ

Gの構成方法 (F は n 変数・m 項からなる):

1. Fの各変数 x_i に対して，頂点 x_i^+, x_i^- と辺 (x_i^+, x_i^-) を追加する
2. Fの各項 $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ に対して，頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と3辺 (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1}) を追加する
3. 各項 C_jに対して，リテラルl_{i1} が x_iなら辺 (l_{i1}, x_i^+) を，$\neg x_i$ なら辺 (l_{i1}, x_i^-) を追加する
4. $k = n+2m$ とする

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

There is an assignment that makes $F()=1$ $\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

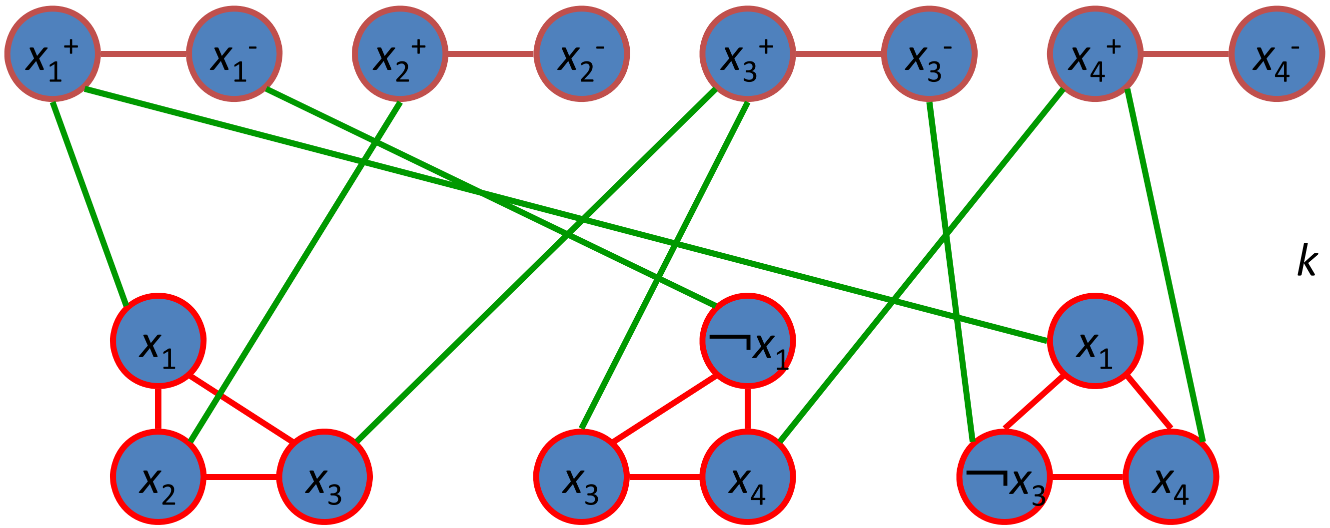
Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain
- at least one of x_i^+ or x_i^-
- at least 2 of 3 vertices in C_j

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

We have no extra vertex!!

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



G

$k = 4+2\times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

FからGの構成は，明らかに多項式時間で可能である．
したがって，以下を証明すればよい：

$F()=1$とする割当てがある
⇔G が大きさkの頂点被覆をもつ

観測：

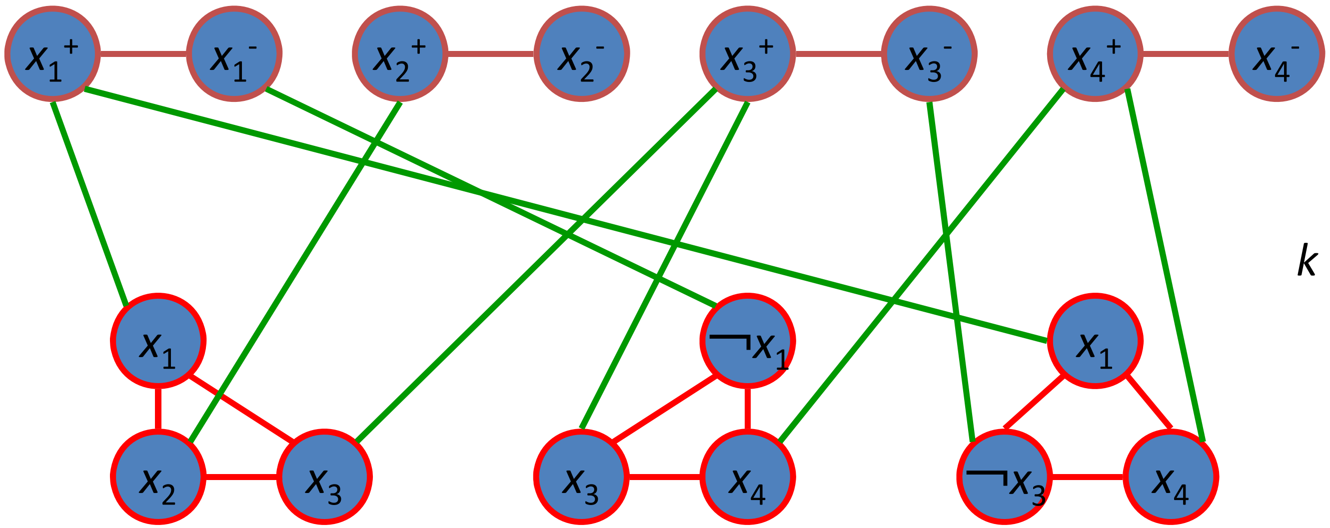
Gの構成方法から，頂点被覆 S は以下の頂点を必ず含む
- x_i^+ or x_i^- から少なくとも一つ
- C_jの三つの頂点から少なくとも二つ

よって $|S| \geqq n+2m = k$

余分な頂点は一つもない！

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Theorem VC is NP-complete

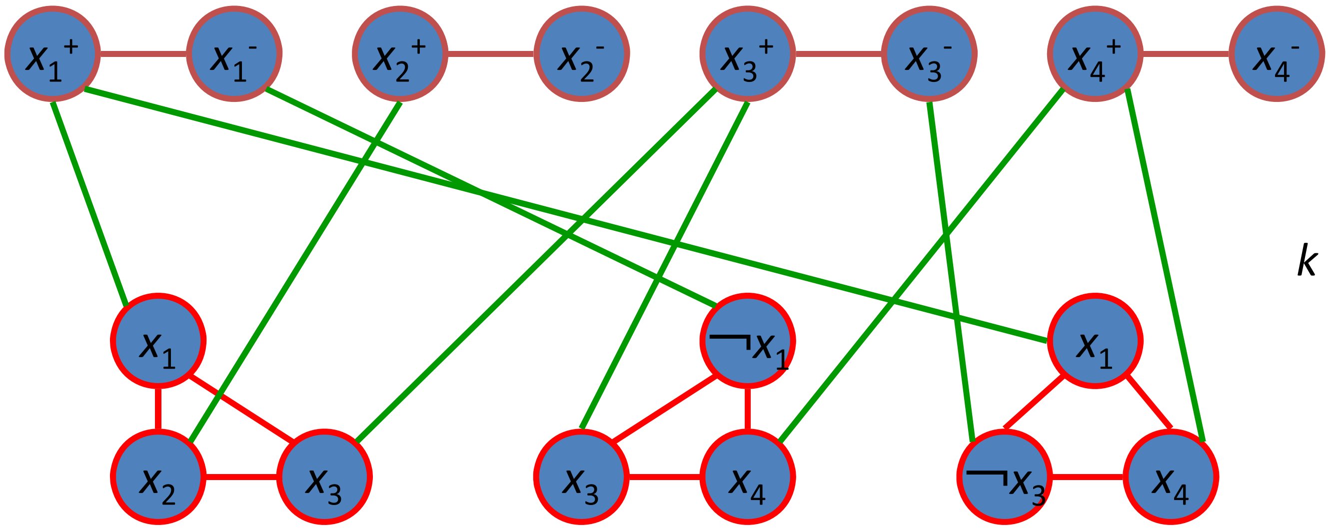
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Rightarrow$ G has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

定理 VCはNP完全問題

$F()=1$とする割当てがある
⇒G が大きさkの頂点被覆をもつ

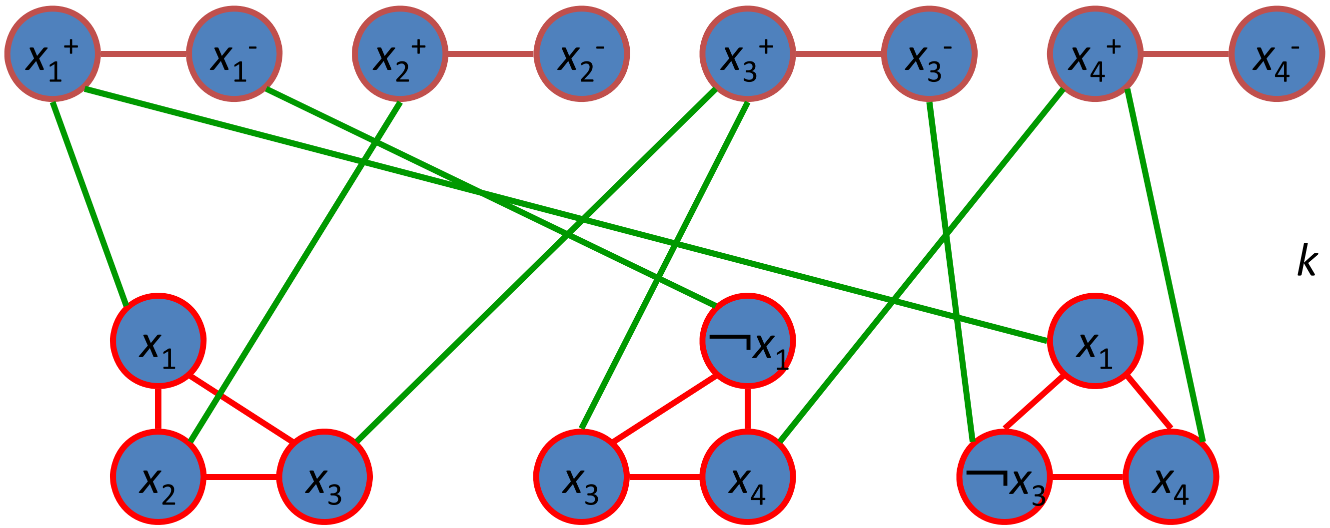
1.各 x_iに対して $\left\{ \begin{array}{l} x_i=1\text{なら}x_i^+ \\ x_i=0\text{なら}x_i^- \end{array} \right\}$ をSに

2. 各項 $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので，少なくとも一つのリテラル l_{i1} に対して辺 (l_{i1},x_{i1}) は変数x_{i1}で被覆されている．そこで残りの二つのリテラル (l_{i2},l_{i3}) を S に

⇒ 観測 よりSは大きさkの頂点被覆．

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

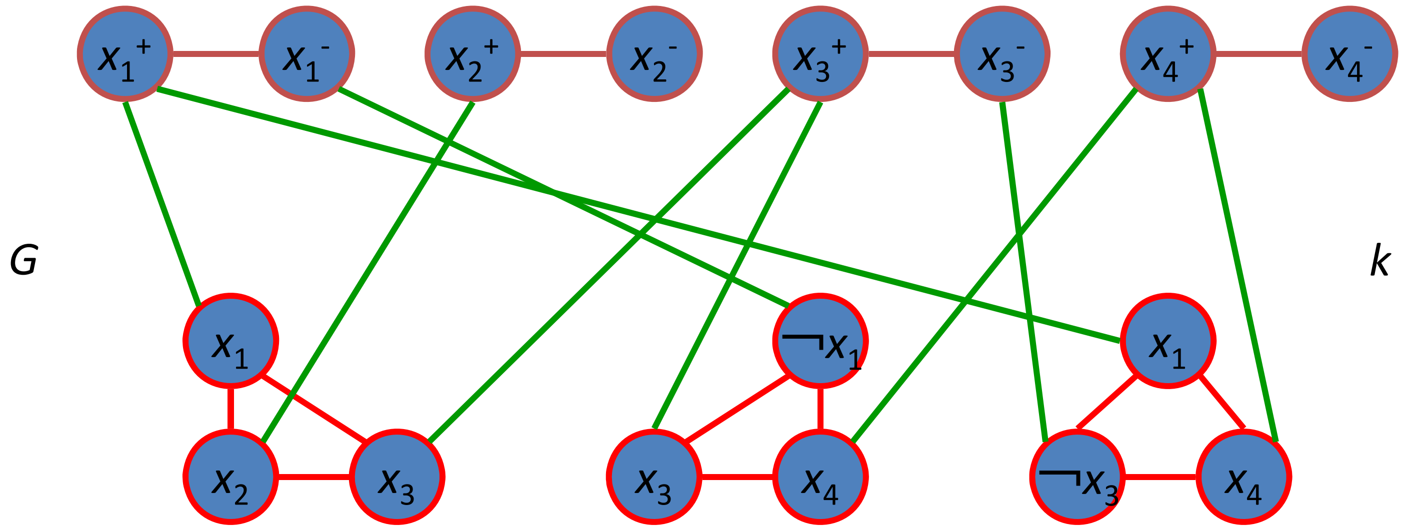
Theorem VC is NP-complete

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment that makes $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\begin{cases} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2\times 3=10$

Q.E.D.

定理 VCはNP完全問題

G が大きさkの頂点被覆をもつなら，$F()=1$とする割当てが存在する

1. 観測 より，被覆 S は各項から $2m$ 頂点含み，変数から n 頂点含む．

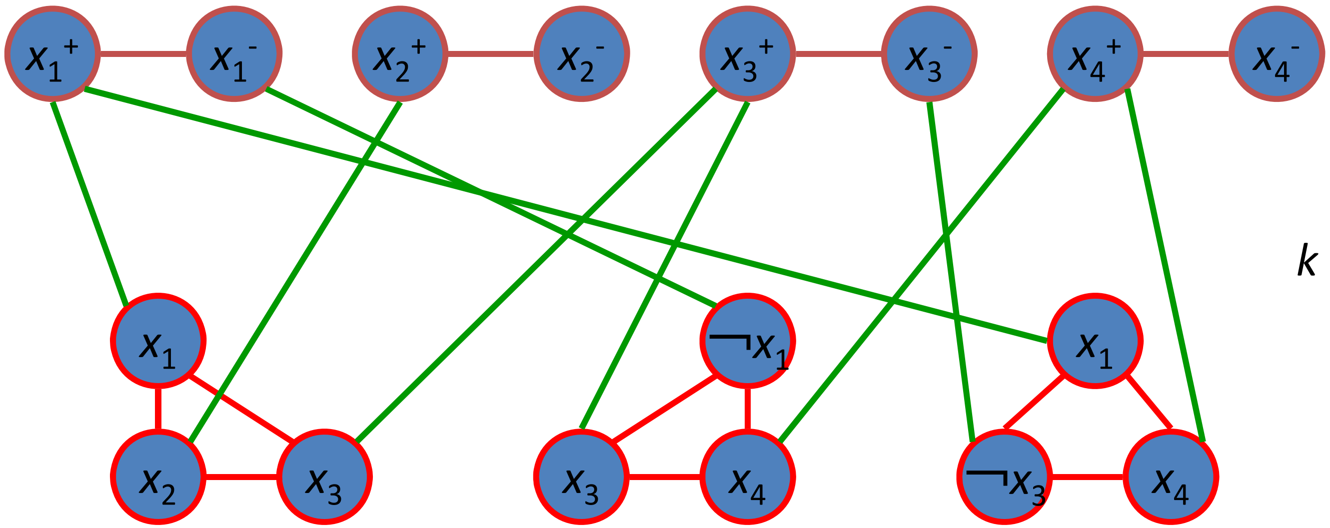
2. よって被覆 S はx_i^+ と x_i^- からちょうど一つと，各項C_jからちょうど二つのリテラルを含む

3. つまり各項 C_j はSに含まれないリテラルl_iをちょうど一つだけ含み，そこにつながる辺は変数頂点で被覆されている．

⇒ 以下の条件を満たす割当ては F を充足する：$\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \in S \text{ なら} x_i=1 \\ x_i^- \in S \text{ なら } x_i=0 \end{array} \right.$

例:　$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$

G



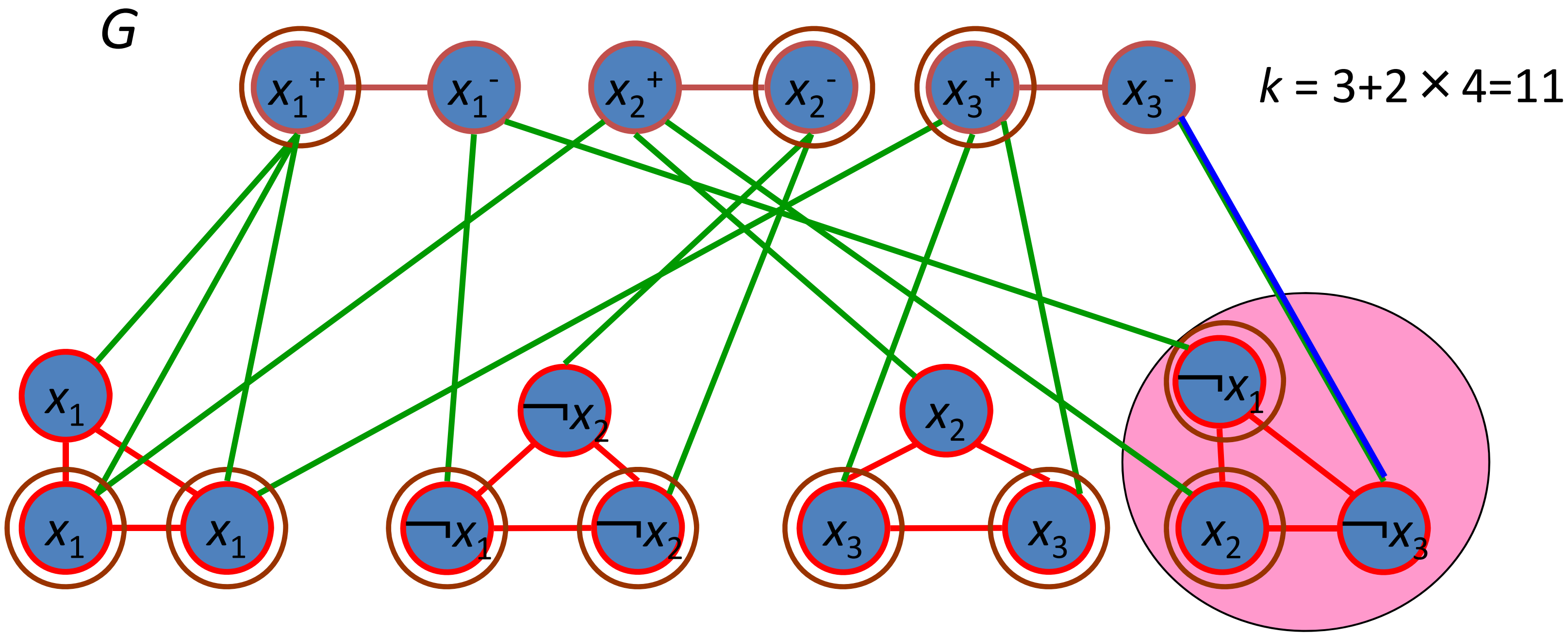
$k = 4+2 \times 3=10$

Q.E.D.

Theorem VC is NP-complete… Addition

What happen if the formula is not satisfiable?

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \lor x_1 \lor x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_2) \land (x_2 \lor x_3 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$$

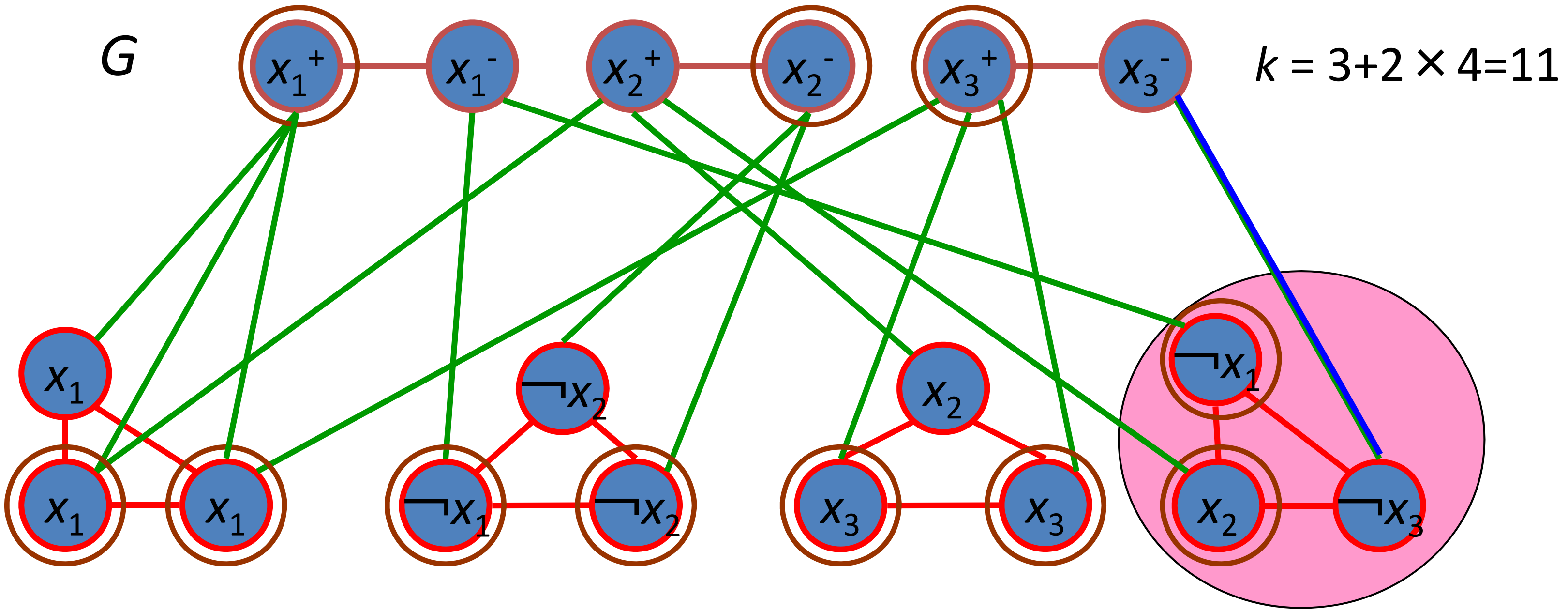


If F is unsatisfiable, it contains at least one clause s. t. each literal is *not* covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain *three* literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理 VCはNP完全問題... 補足

命題論理式が充足可能でないときにはどうなるのか?

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



F が充足可能でないときには，ある項において項どのリテラルも変数側の頂点によって被覆されない．よって頂点被覆集合はこの項のリテラルを三つともふくまなければならない．
したがって頂点被覆集合は少なくとも大きさ*k*+1になる．

6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.2. Completeness

Theorem

degree: the number of edges incident to a vertex

DHAM is NP-complete even if maximum degree=5.

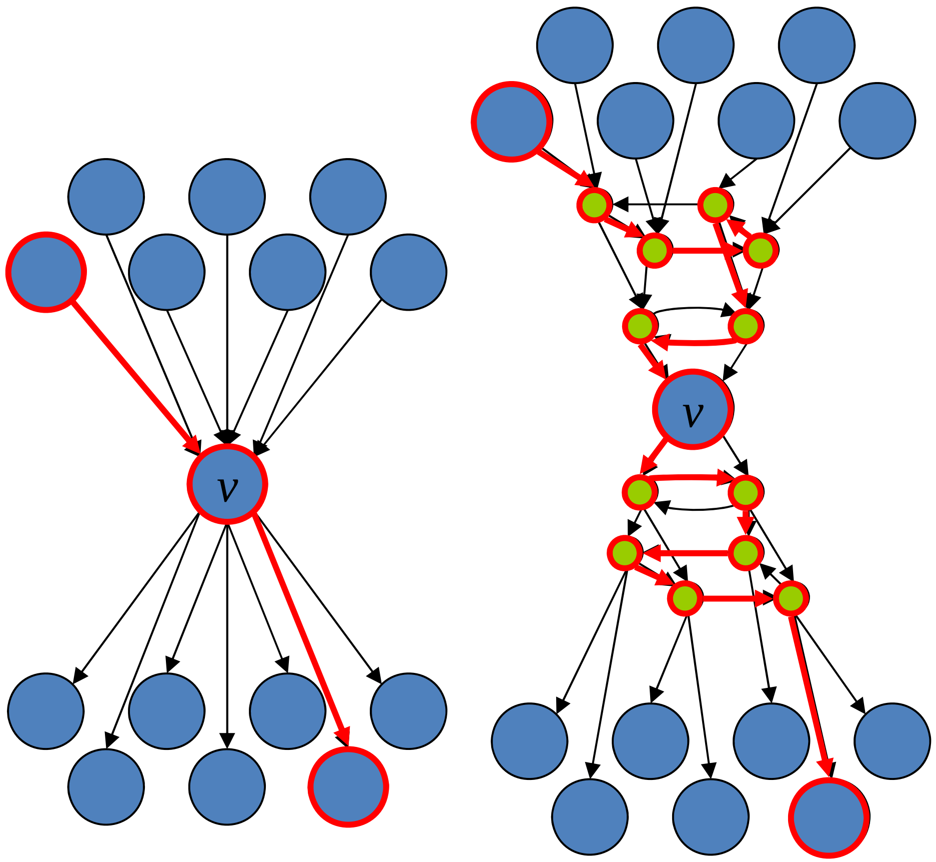
[Proof]

Since DHAM $\in$ NP, $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5} \in$ NP.
We show $\mathrm{DHAM} \leq_m^P \mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

A Hamiltonian cycle through *v* on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through *v* on the resultant graph.



6.多項式時間計算可能性の解析

6.2. 完全性

定理

次数: 頂点につながる辺の本数

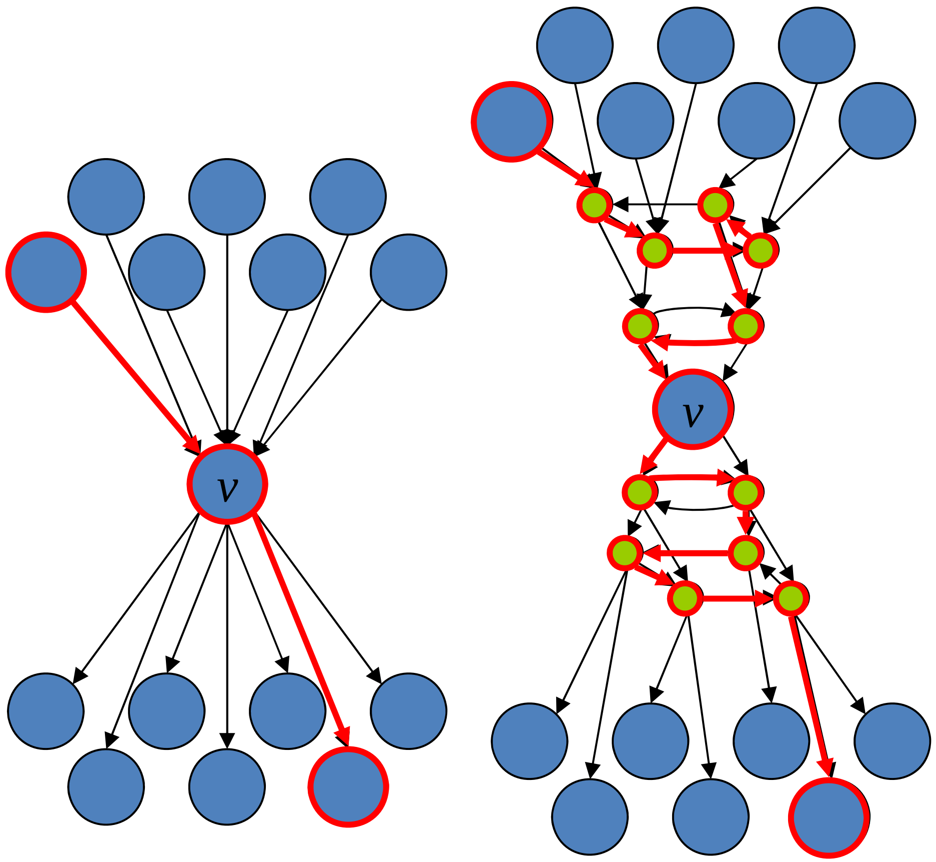
DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

[証明]

DHAM ∈ NPなので $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$ ∈NP.
よってDHAM $\leq^P_m$ $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$を示す

アイデア

「vに入る辺」や「vから出る辺」を
しかるべきガジェットで置き換える

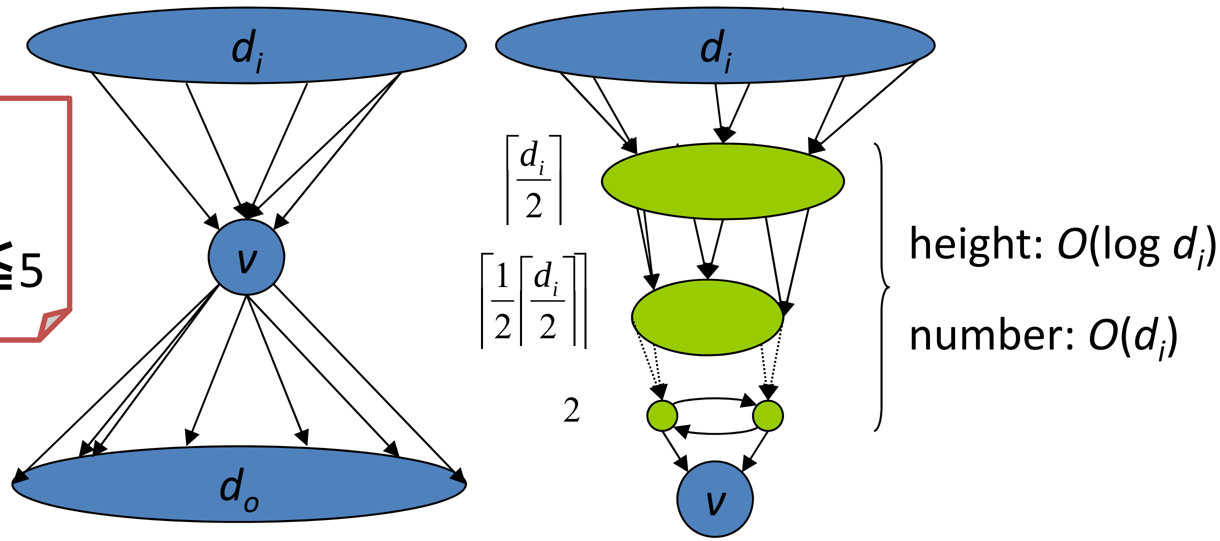


元のグラフでvを通る
ハミルトン閉路は,
置き換えたグラフでvを
通るハミルトン閉路に
対応づけられる.

6.2. Completeness

Theorem DHAM is NP-complete even if max. degree=5.

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg≦5



[Proof (sketch)]

For each vertex *v* of degree≧6, replace the edges around *v* by the gadget.

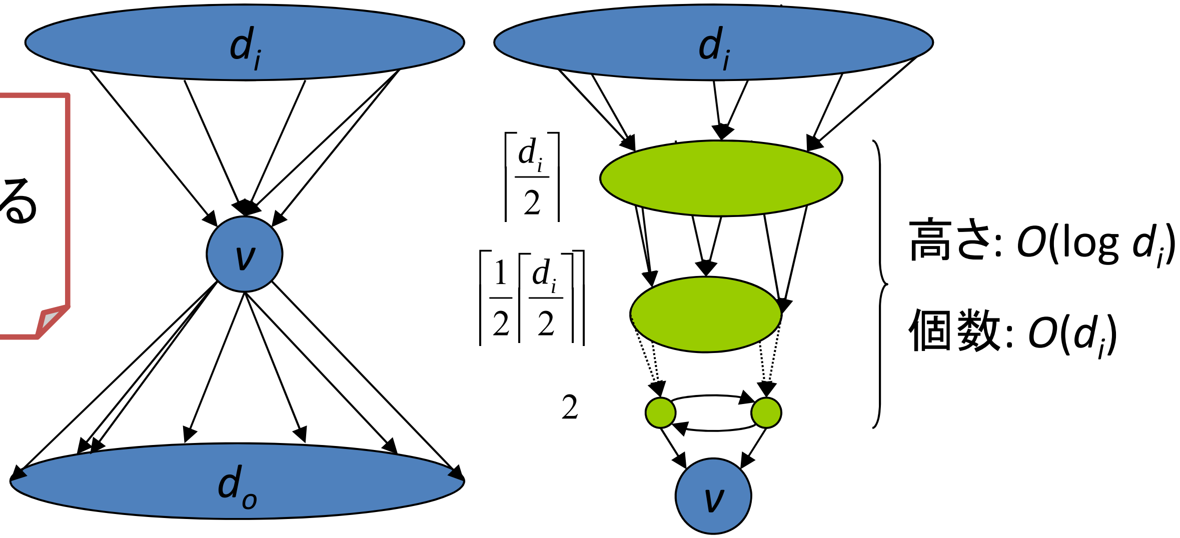
1. If the original graph *G* has *n* vertices with *m* edges, the resultant graph *G'* contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of *n* & *m*.
2. Each vertex in *G'* has degree *at most* 5.
3. *G* has a Hamiltonian cycle ⇔ *G'* has a Hamiltonian cycle.

QED.

6.2.完全性

定理　DHAM はグラフの最大次数が5でも NP完全

ポイント:
- 上から下に閉路を通る
- 各頂点の次数≦5



[証明 (概要)]

次数≧6の各頂点 v に対して，v の頂点の周りの辺をガジェットで置き換える

1. もとのグラフ G の頂点数をn，辺数を m とすると，還元後に得られるグラフ G' の頂点数は $O(n+m)$ で辺数は $O(m)$ となる．よってこの還元はn と m の多項式時間で実行できる．
2. G' の各頂点の次数はたかだか 5.
3. G がハミルトン閉路をもつ ⇔ G' がハミルトン閉路をもつ

QED.

Addition (おまけ)

Many natural hard problems are either
- Poly-time solvable, or
- NP-hard

- R. Uehara, S. Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- P. Zhang, H. Sheng, R. Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.

- R. Uehara, S. Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- E. Demaine, M. Demaine, R. Uehara, T. UNO, Y. UNO:
  UNO is hard, even for a single player,
  Theoretical Computer Science, Vol. 521, pp.51-61, 2014.

- Erik D. Demaine, David Eppstein, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Anna Lubiw, Ryuhei Uehara, and Yushi Uno: Folding a Paper Strip to Minimize Thickness, Journal of Discrete Algorithms, Vol. 36, pp. 18-26, 2016.

Schedule(残りの予定)

- 10/30(Mon): Last class for former half (前半最後の講義)
  - I will ask about the following choice for the exam.
  - Questionnaire
  - Office Hour: Follow up the report, and etc.
- 11/01(Wed): mid-term exam (中間試験)
  - 40 points
  - Choices are;
    - Anything without electricity (w/o cell/ipad/…) (電子デバイス以外何でも)
    - Textbooks, copy of slides, and hand written notes (教科書/スライド/ノート)
    - Copy of slides, and hand written notes (スライド/ノート)
    - Only pens and pencils (持ち込み不可)
  - Range of exam: Lesson 3~Lesson 6（講義3~講義6）,
    which means that “no diagonalization in exam”