I216E Computational Complexity and Discrete Mathematics Report

2017, Term 2-1

Ryuhei Uehara(Room I67b, uehara@jaist.ac.jp)

Propose(出題): October 18 (Wed)

Deadline(提出期限): October 25 (Wed), 12:30pm.

Note(注意): Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. (レポートには氏名，学生番号，問題，解答をすべて書くこと．)

Answer two of the following problems. (以下の問題から 2 問選んで答えよ．)

Problem 1 (5 points): For any given string x, we denote by $lo(x)$ and $oo(x)$ the indices of x in the pseudo-lexicographical ordering with length preferred and the usual lexicographical ordering, respectively. For example, we have $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, and $oo(00) = 3$. We also denote by $n < \infty$ when the number n is finite. Now, declare if each of the followings is true or false. If it is false, show a counterexample. In the followings, x denotes a string and n denotes a positive integer. （文字列 x に対して，長さ優先辞書式順序における x の出現順序を $lo(x)$，通常の辞書式順序における x の出現順序を $oo(x)$ と書くことにする．例えば $lo(\epsilon) = oo(\epsilon) = 1$, $lo(0) = oo(0) = 2$, $lo(1) = 3$, $oo(00) = 3$ である．またある数 n が有限であることを $n < \infty$ と書くことにする．このとき以下の記述が正しいか誤りかを判定せよ．誤りである場合は反例を示せ．ただし以下の記述中，x は文字列，n は正整数である.）

$$\forall x \, \exists n \, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{1}$$

$$\exists n \, \forall x \, [\ |x| < \infty \to lo(x) < n\ ] \tag{2}$$

$$\forall x \, \exists n \, [\ |x| < \infty \to oo(x) < n\ ] \tag{3}$$

$$\exists n \, \forall x \, [\ |x| < \infty \to oo(x) < n\ ] \tag{4}$$

Problem 2 (5 points): Let $X_1, X_2, \ldots$ be the Turing machines, and $x_1, x_2, \ldots$ are the corresponding binary string. (That is, a string x_i is the binary code of the Turing machine X_i.) We denote the output of X_i with a binary input x by $X_i(x)$. For two strings x and y, their concatenation is denoted by $x \cdot y$ (e.g., $000 \cdot 111 = 000111$). Let f be the function defined as follows:

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & \text{if } X_i \text{ halts for the input } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prove that this function f is not computable. ($X_1, X_2, \ldots$ をチューリングマシンとし，$x_1, x_2, \ldots$ を対応する 2 進文字列とする．(つまり x_i はチューリングマシン X_i を 2 進文字列で記述したものである．) X_i に 2 進文字列 x を与えたときの出力を $X_i(x)$ と書くことにする．二つの文字列 x と y に対し，これらの連接を $x \cdot y$ と書く（例えば $000 \cdot 111 = 000111$ である）．ここで次の関数 f を考える．

$$f(x) = \begin{cases} X_i(x_i) \cdot 1 \cdot X_i(x_i) & X_i \text{ に入力 } x = x_i \text{ を与えたら停止するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この関数 f が計算不能であることを証明せよ．)

Problem 3 (5 points): The set N of natural numbers is enumerable. Now, prove that the set 2^N of subsets of N is *not* enumerable by diagonalization. （自然数の集合 N は可算無限集合である．N の部分集合の集合 2^N は非可算無限集合であることを対角線論法で証明せよ.）(Hint: For $S = \{1, 2, 3\}$, we have $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.)

Problem 4 (5 points): In the slide of the second lecture, we prove the theorem that claims “The set R of real numbers is not countable.” Now let replace every “real” by “rational”. Then it seems that we prove the theorem that claims “The set R' of rational numbers is not countable.” But, the set of all rational numbers *is* countable. Point out where is wrong. （2 回目の授業で使ったスライドで「実数の集合 R は非可算である」という定理の証明を行った．この中の「実数」をすべて「有理数」で置き換えてみると，一見「有理数の集合 R' は非可算である」という定理の証明になる．しかし有理数は可算である．証明のどこが間違っているか，指摘せよ.）