

実践的幾何アルゴリズム

Advanced Algorithms for Computational Geometry

13. 最新のアルゴリズムの話題から: 計算折り紙その1

担当: 上原隆平

忘れないようにアナウンス:

- 11月16日(木): この講義. レポート配布.
- 11月21日(火): 出張のため休講
- 11月28日(火): 最後の講義. (リクエストあれば)
- 11月30日(木): 期末試験

Advanced Algorithms for Computational Geometry 実践的幾何アルゴリズム

13. Recent Topics in Advanced Algorithm: Computational Origami I

Ryuhei Uehara

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙(ORIGAMI)
 - 1500年代, おそらく紙の普及とともに自然発生的に...?アジアで...
 - 現在, ORIGAMI はすでに英語化していて, 書店にも ORIGAMI コーナーがある.
 - 折り紙っぽいものも...

「折ってない」「紙じゃない」
Origami も増えてきた... おそらくNSFのビッグファンドのせいだと思ってますが...?



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙の急激な発展
 - 1980年代~1990年代, 折り紙が急速に複雑化した.



前川の「悪魔」
1980年頃発表
(正方形1枚から
折れる！)



川崎ローズ
1985年頃発表
(正方形1枚
から折れる！)



Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
(1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！)

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- コンピュータの利用と折り紙への応用

- 1990年代以降, コンピュータを用いた折り紙デザインが発展



Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
(1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！)



舘知宏のOrigamizer
2007年発表
(長方形の紙1枚から
10時間くらいで折れる)



三谷純の回転対称な折り紙
2010年頃発表
(長方形の紙1枚から折れる)

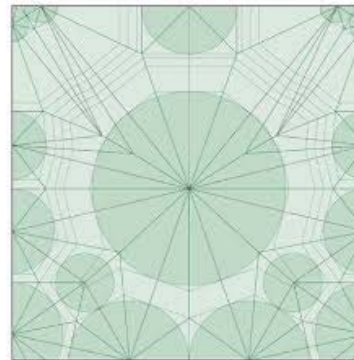
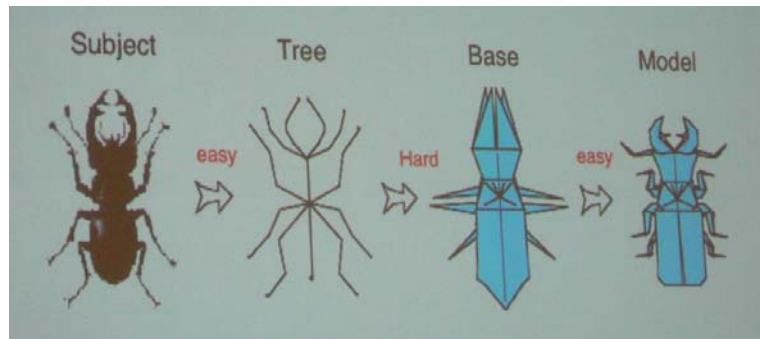
2016年、
シン・ゴジラと
Death Note の
両方に登場!!

2017年、
「正解するカド」に
ちょっと登場!!

折り紙とコンピュータサイエンス

- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発:
 - 1980年代: 前川さんの「悪魔」
 - CAD的に「パーツ」を組み合わせる
コンプレックス折り紙の発祥
 - 2000年代: Lang さんの TreeMaker
 - 与えられた「木構造」(距離つき)を正方形上に展開するソフト
 - さまざまな最適化問題を現実的な時間で計算

NP完全問題も
解いている



折り紙の科学に特化した国際会議

1. 1989年12月 @ Italy
The International meeting of Origami Science and Technology
2. 1994年 @ 滋賀県大津
3. 2001年3月 @ アメリカ
The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)
4. 2006年9月8日-10日 @ アメリカ
4OSME
5. 2010年7月13日-17日 @ シンガポール
5OSME
6. 2014年8月10日-13日 @ 東大
6OSME
7. 2018年9月5日-7日: 7OSME @ Oxford, UK!



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- “Computational Origami”の提案

1990年代~

計算幾何学の分野で「計算幾何」や「最適化問題」として「折り」の問題をとらえ始める

この分野の**超**著名な研究者：Erik D. Demaine

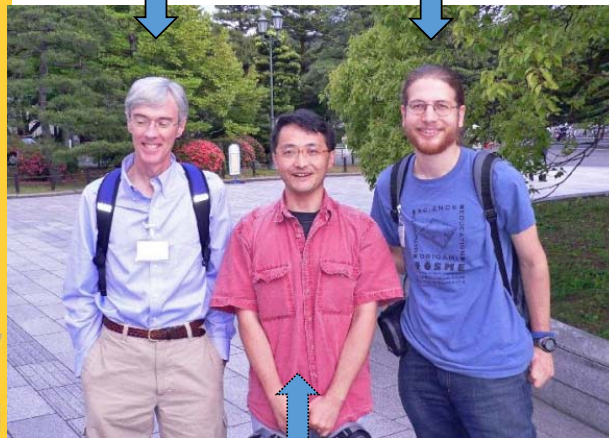
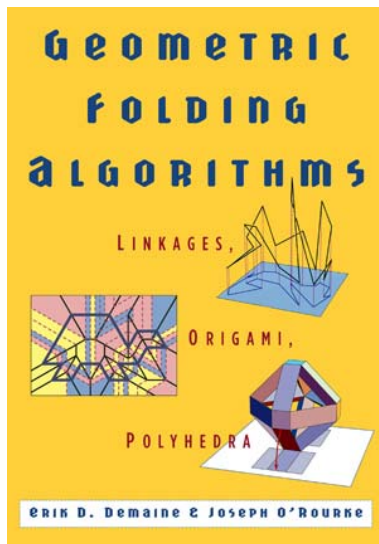
- 1981年生まれ
- 2001年, 20歳でカナダで博士号を取得し,
そのままMITの教員になり, 現在に至る
- 彼の博士論文のテーマが計算折り紙であった.
- 今でもMITのOrigami研究を強力に牽引(ロボットなど)



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

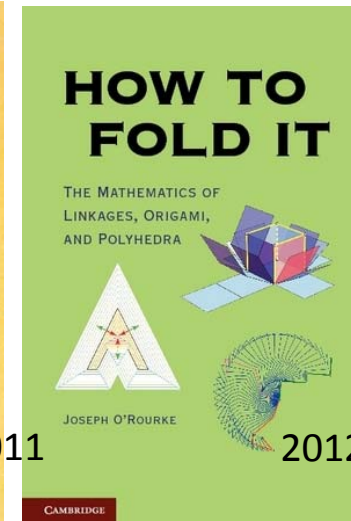
- 文献紹介

Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra
by J. O'Rourke and E. D. Demaine, 2007.



著者

日本語に訳しました (2009).



今日のトピック

展開図とそこから折れる凸多面体の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係: 最大の未解決問題
- 与えられた展開図を折って作れる(凸)多面体をどうやって計算するか?
 - 分野としては
 - 計算幾何学
 - グラフ理論とグラフアルゴリズム
 - の両方にまたがる
 - 数学的な特徴づけ/アルゴリズム/計算パワーを総動員
- 「複数の箱を折る」話

未解決問題が多く、若手の活躍がめざましい分野です.

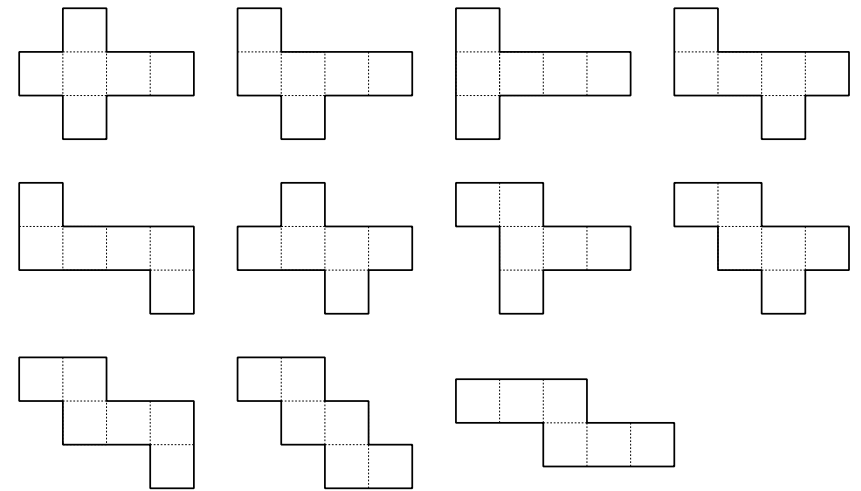
準備. (辺)展開図とは？

- (一般)展開図: 多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
 - 連結であること
 - 重なりを持たない単純多角形であること(便宜上、直線の集まりとする)
- (辺)展開図: 多面体の辺に沿って切り広げた多角形
 - 展開の境界部分は多面体の辺からなる
 - 日本の小学校で習うのは(なぜか)こちら

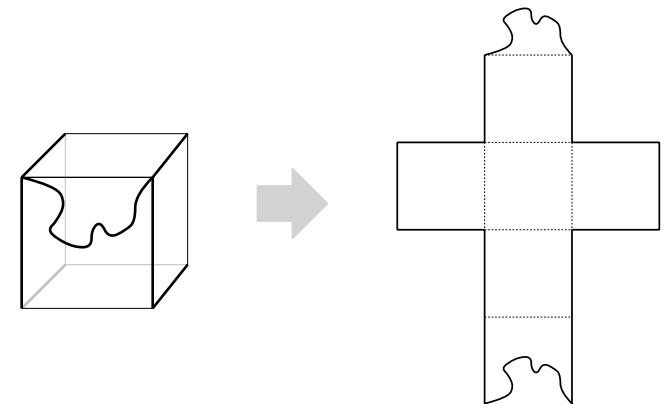
★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

準備体操. 展開図の基礎知識: パズル

- 「立方体の展開図は11通りである」と小学校で習う. しかしこれは, 辺展開図に限定している. 実際には**無限に存在**する.
 - **パズル**: 立方体の展開図で, 正方形6つで作られるものを, 上記の11通り以外に見つけて!
1. 大きさが同じでなくてもよい場合は?
 2. 大きさがすべて同じ場合は?



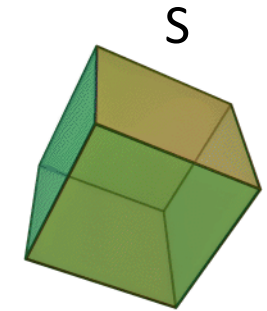
紙風船でも折って考えてみよう!



Special Thanks: 岩井政佳氏

準備. 展開図の基礎知識

凸多面体 S の頂点と辺から構成されるグラフを G とする



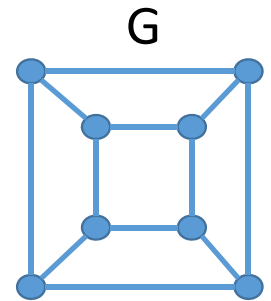
[全域木定理(その1)]

S の辺展開におけるカットラインは、 G 上の全域木である

[証明]

- すべての点を訪れること:
カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない

系: 正多面体では、
すべての辺展開
においてカットの
長さは同じ



[全域木定理(その2)]

S の一般展開におけるカットラインは、 S 上ですべての頂点を張る木である

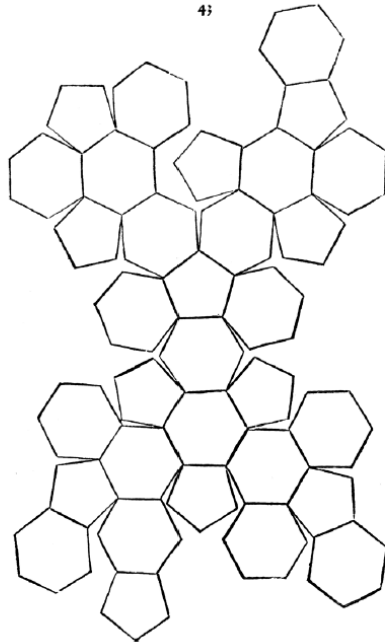
注: 広げたときに
重ならないかどう
かは、別問題.

展開図の簡単な歴史

- アルブレフト・デューラーの『画家マニュアル』(1525)

S In anders das mach auß zweinzig sechs eckter flachen seibern/ gleichförmig vnd windlich/ so man darzu yett zwölff fünf eckter flacher seiber/ so die gleichförmig gegen den sechs eckern seiden sind/ vnd in jenen selbe auch gleich windlich vnd ebenlich an einander geschnitten/ wie ich das oben im yfano hernach hab aufgerissen/ So man dann das alles zusammen schneuß/ so wirt ein corpus daraus/ das gewinner insey vnd sechzig eck/ vnd nichtig schwarz für seuen/ die Corpus rüret in einer helen kugel mit allen seinen ecken an.

43



- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた...?

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

展開図の簡単な歴史

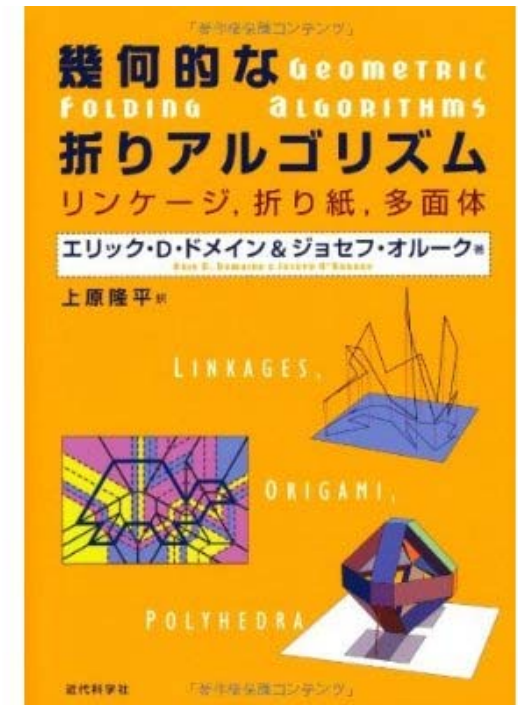
未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない) 未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つかっていない(当然?)
- 凹多面体なら反例がある
(どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能
(一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
実験的にはほぼ確率1で重なってしまう

まとめ: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない



もし興味があれば...

展開図の簡単な歴史

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

まとめ: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

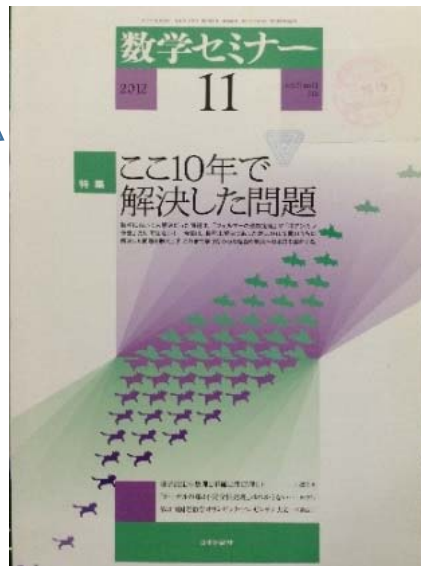
本研究の興味の対象:

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

複数の箱が折れる共通の展開図

- 2通りの箱が折れる共通の展開図
 - 3通りの箱が折れる共通の展開図
- そして....残された未解決問題たち

この雑誌に
載ってます！



このミステリー(?)の中でメイン
トリックに使われました！

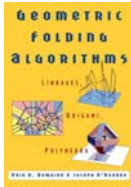
主な文献

- Dawei Xu, Takashi Horiyama, Toshihiro Shirakawa, Ryuhei Uehara: Common Developments of Three Incongruent Boxes of Area 30, *COMPUTATIONAL GEOMETRY: Theory and Applications*, Vol. 64, pp. 1-17, August 2017.
- Toshihiro Shirakawa and Ryuhei Uehara: Common Developments of Three Incongruent Orthogonal Boxes, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, Vol. 23, No. 1, pp. 65-71, 2013.
- Zachary Abel, Erik Demaine, Martin Demaine, Hiroaki Matsui, Guenter Rote and Ryuhei Uehara: Common Developments of Several Different Orthogonal Boxes, *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG' 11)*, pp. 77-82, 2011/8/10-12, Toronto, Canada.
- Jun Mitani and Ryuhei Uehara: Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes, *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2008)*, pp. 39-42, 2008/8/13.

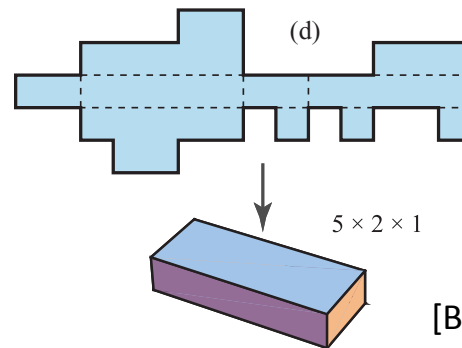
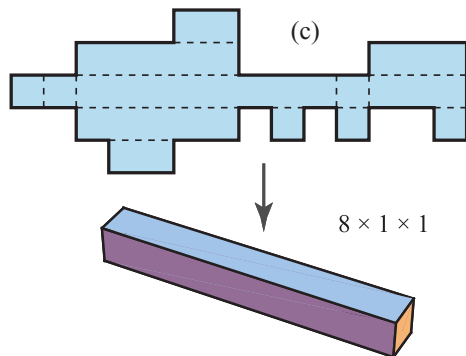
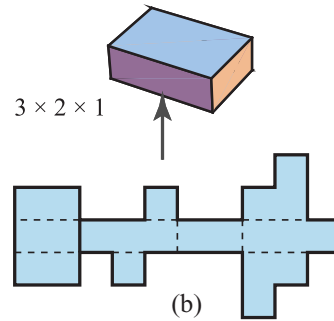
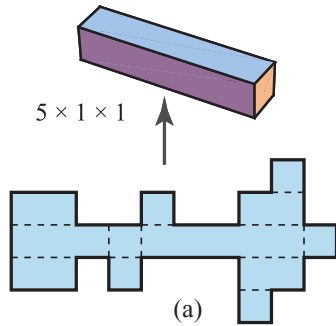
いくつかの展開図は以下で公開:

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index-e.html>

文献の翻訳中のこと...



- 2種類の箱が折れる展開図が2つ載っていた;



- これは例外的なのか？
- 3つあるいはそれ以上の箱を折れる展開図は存在しないのか？



Biedl「3つ以上は無いと思うわ。」

[Biedl, Chan, Demaine, Demaine, Lubiw, Munro, Shallit, 1999]

2種類の箱が折れる展開図

文献 [Uehara, Mitani 2008] でランダムに箱を展開し続けるアルゴリズムを実装して実行し続ける;

- 2種類の箱が折れる展開図:
 1. とてもたくさん(～9000)あった
(スパコン使用(SGI Altix 4700))
 2. 理論的には無限に多くある

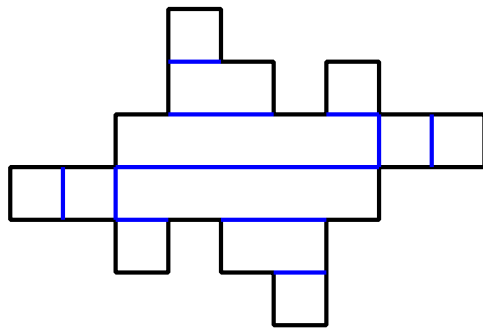


その前に:

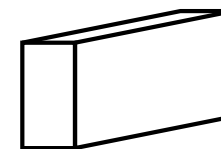
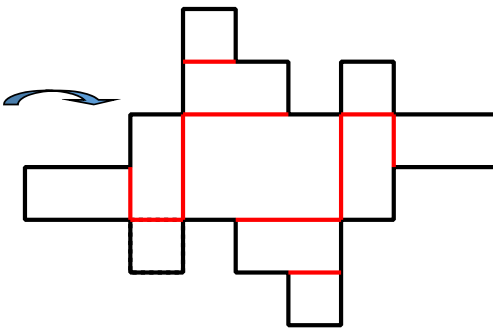
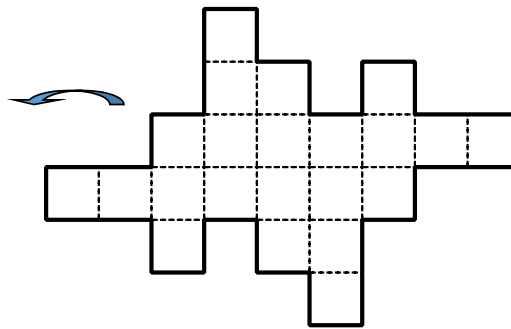
例

$$1 \times 1 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 11 \quad (\text{表面積: } 22)$$

2種類の異なる箱が折れるポリオミノ(単位正方形の集まり)は...



$$1 \times 1 \times 5 = a \times b \times c$$



$$1 \times 2 \times 3 = a' \times b' \times c'$$

- とりあえず単位正方形に沿って切る／折る
- 表面積:
$$2(ab + bc + ca)$$
- 必要条件:

$$ab + bc + ca = a'b' + b'c' + c'a'$$

等式を満たす3つ組が多い
ほど望みがありそう

下準備：表面積と、それを満たす三つ組の表

3つの箱の共通の展開図を見つけるなら

4つの箱の共通の展開図を見つけるなら

面積	三つ組	面積	三つ組
<u>22</u>	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
<u>34</u>	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

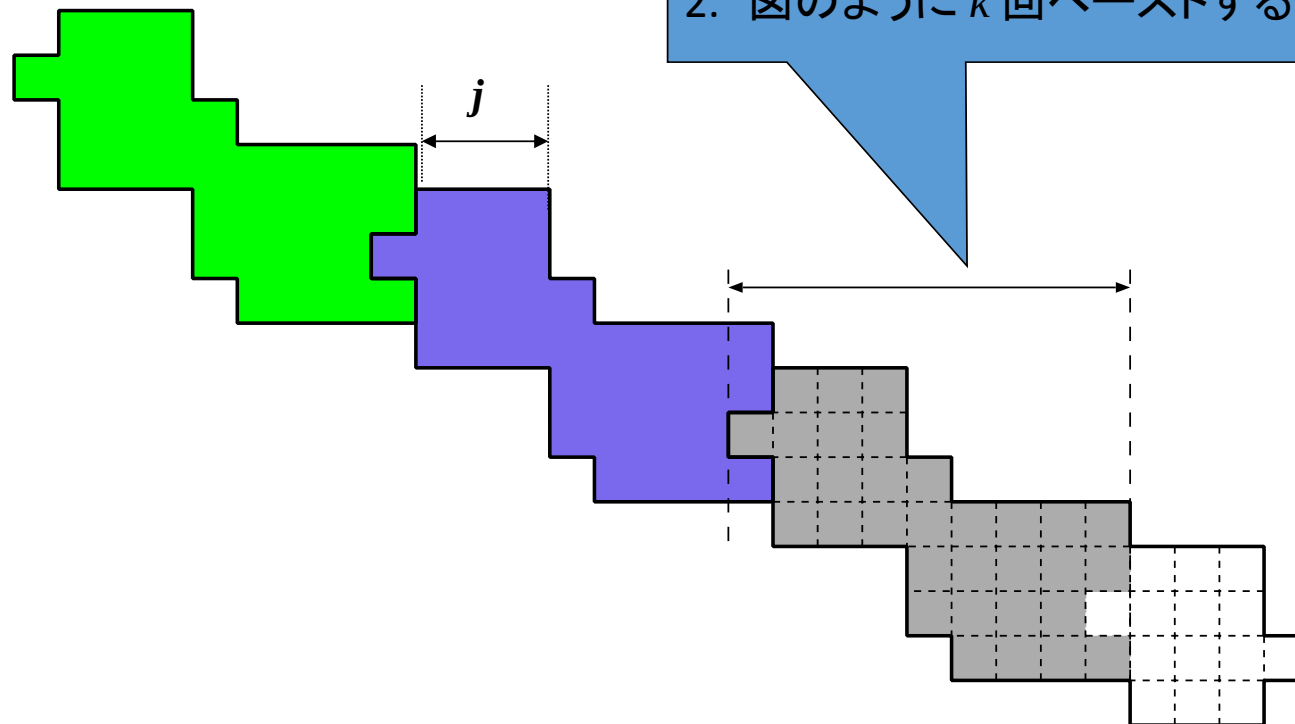
既知の結果

2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

[証明]

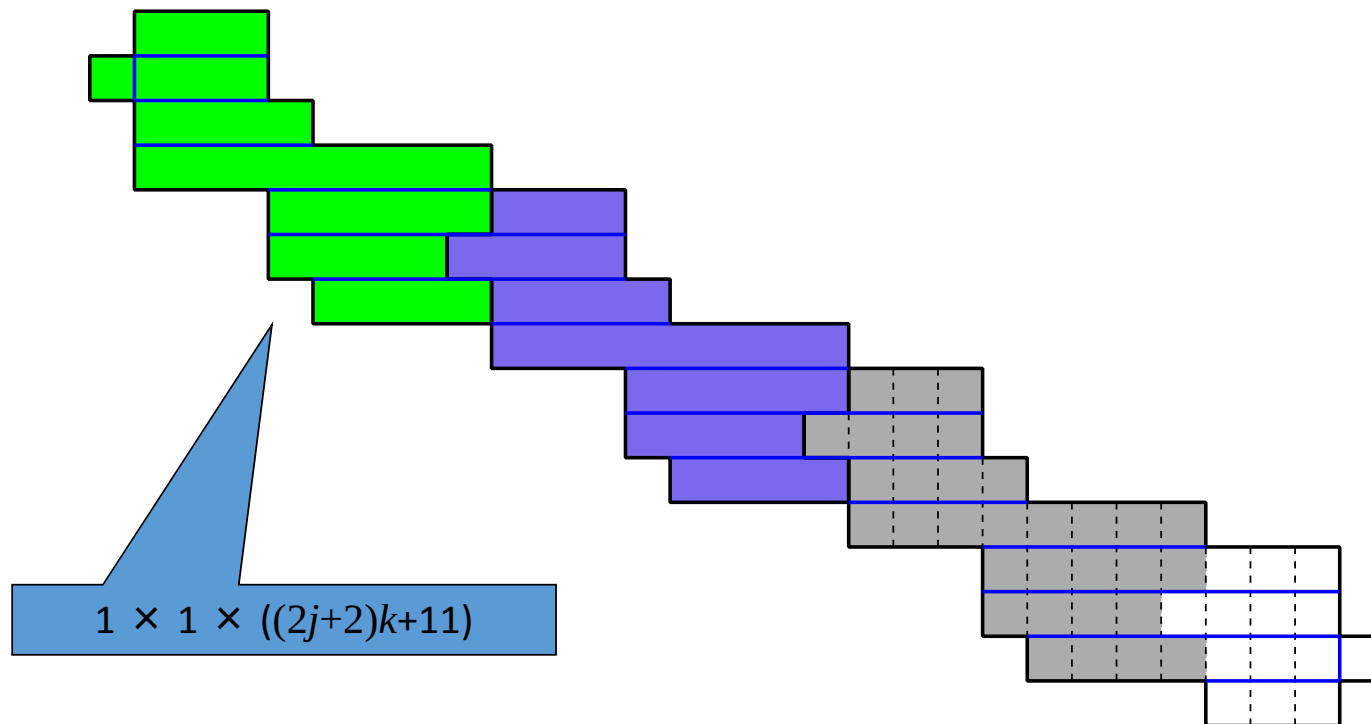
1. この部分をコピーして
2. 図のように k 回ペーストする



2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

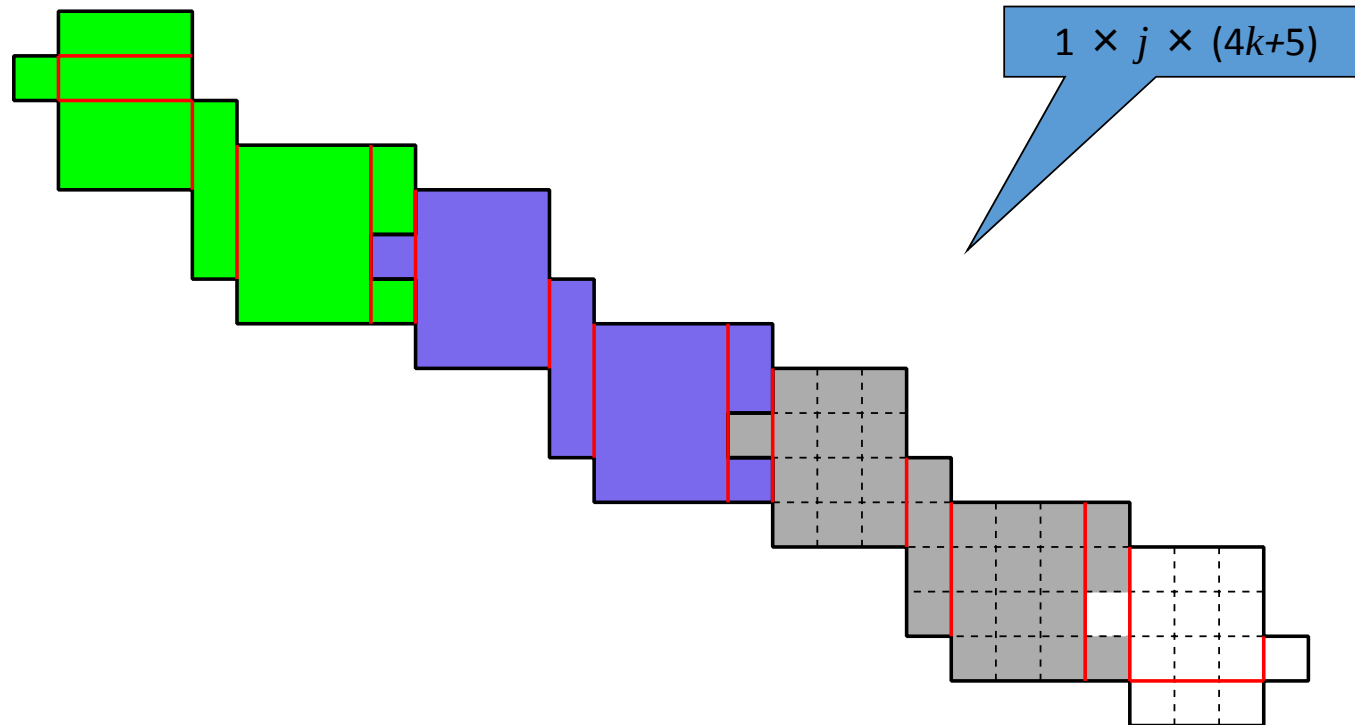
[証明]



2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

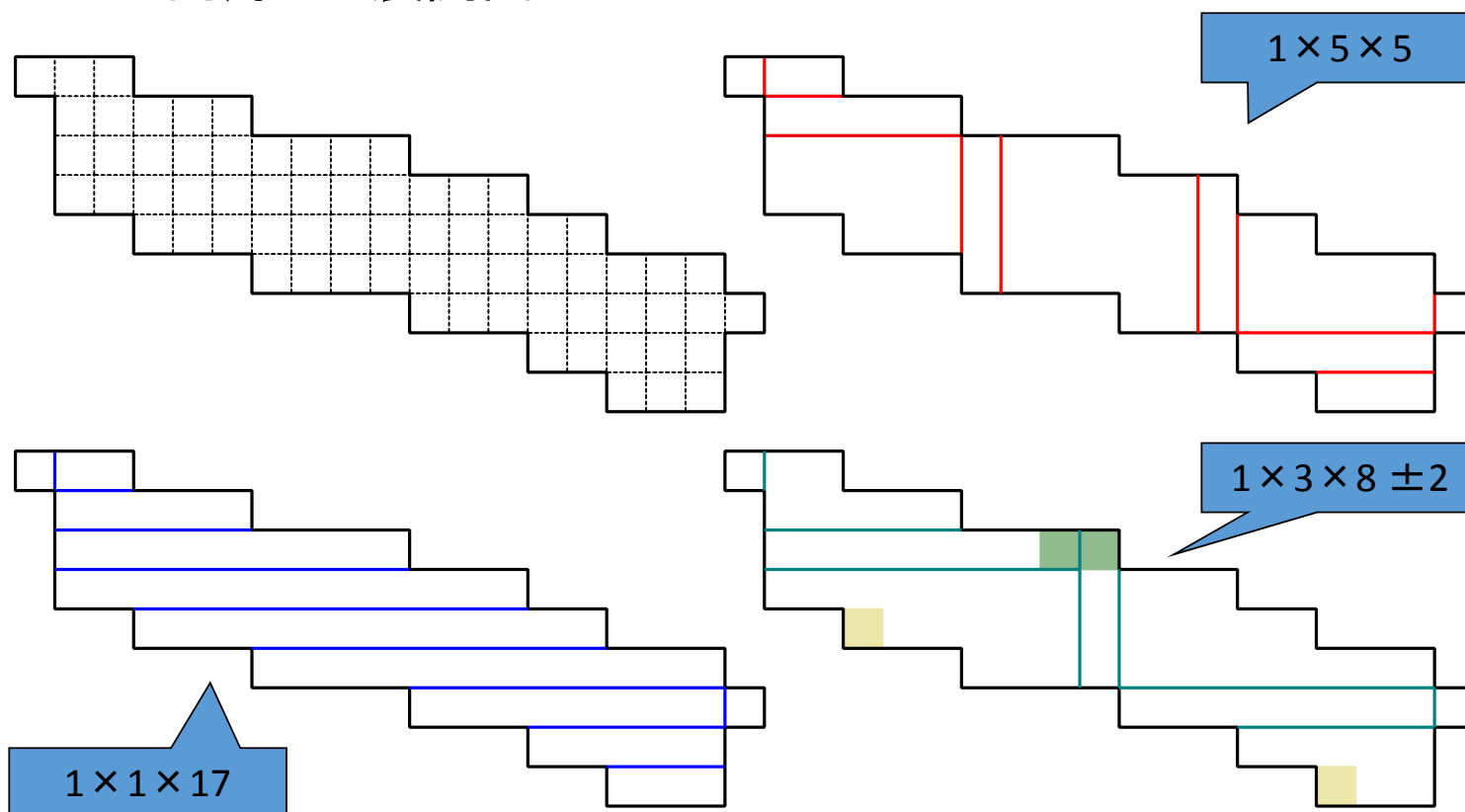
[証明]



3つの箱の共通の展開図(?)

3つの異なる箱が折れる共通の展開図は存在するのか？

- 肉薄した展開図...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

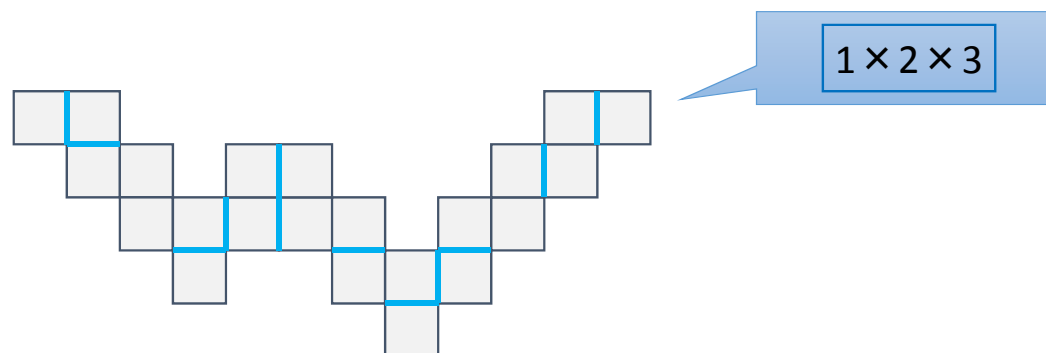
文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である.
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、珠玉の展開図が...

3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

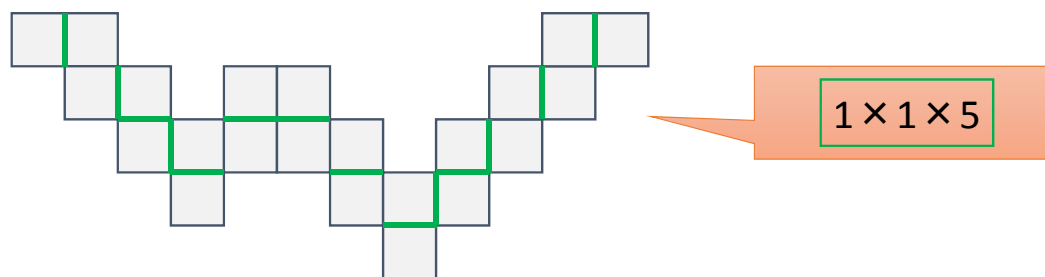
- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である。
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、珠玉の展開図が...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である.
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、**珠玉**の展開図が...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である。

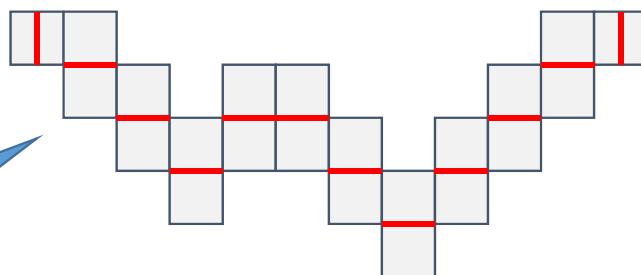
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度

- 2263個の展開図の中にひとつだけ、珠玉の展開図が...

おまけ問題:
3通り折ってみよう

体積0の「箱」はズルくないか?

サイズ $\frac{1}{2}$, が出てくるのがイヤなら4つに分割すればオッケー



両側を除いてどこも2つずつ正方形が縦に並んでいるので

$1 \times 11 \times 0$

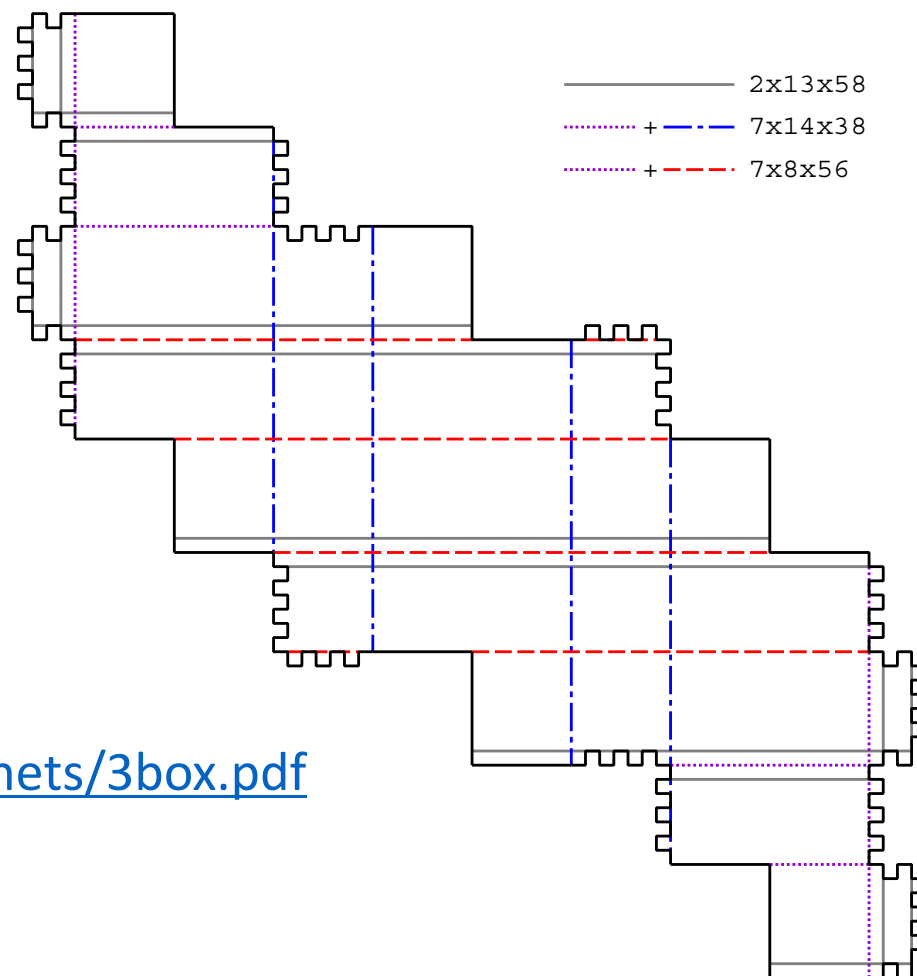


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>にもあります.

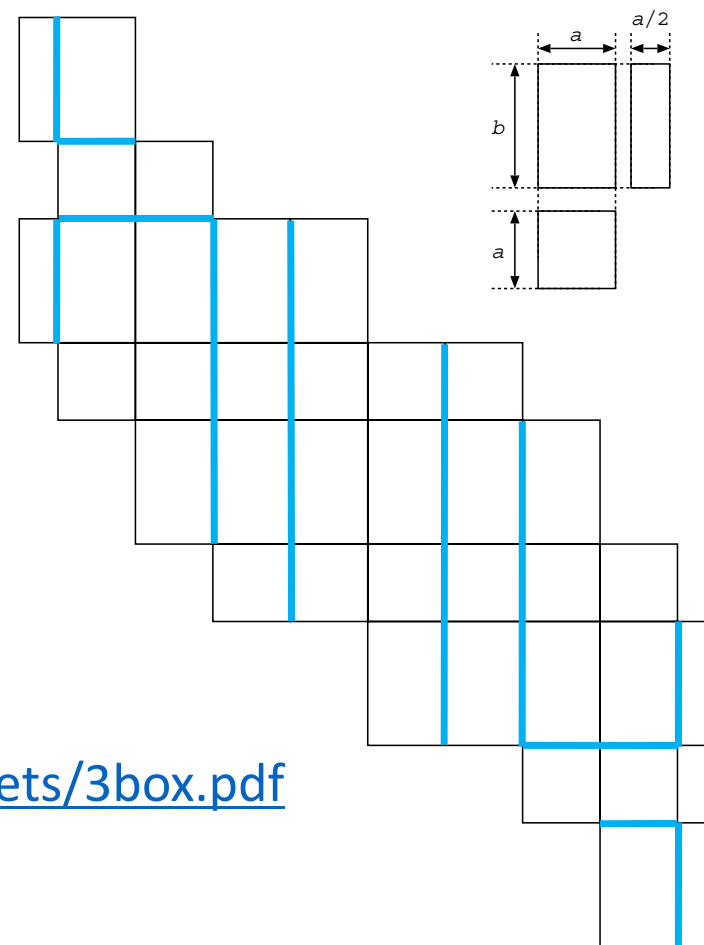


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>にもあります.

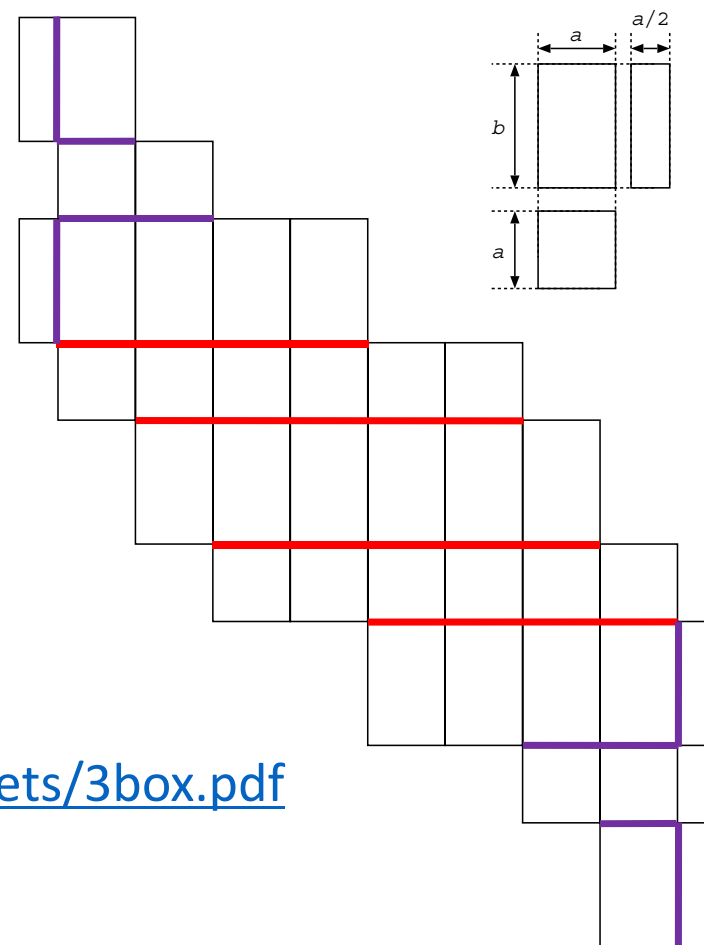


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

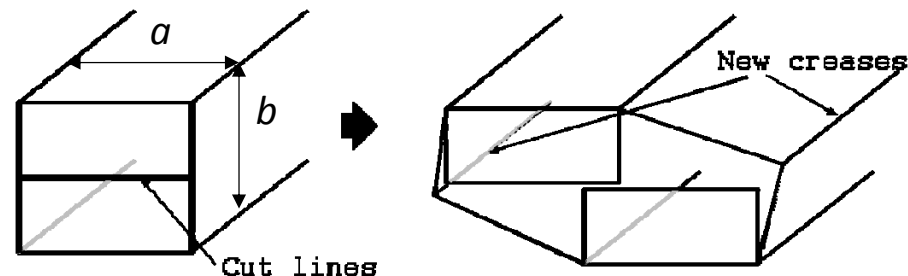
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>にもあります.



3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.



こんな感じで箱をつぶせばなんとかなりそう!?

[失敗!!!]

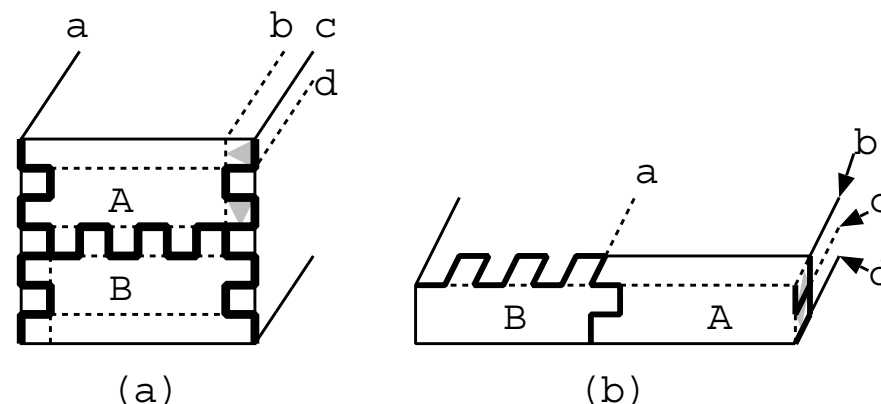
このアイデアは $a=2b$ のときだけ, つまり 1×2 の長方形を 2×1 の長方形にするときしかうまくいかない...

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf> にもあります.

3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れる
ポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.



[できる(うまくやれば)!!]
このパターンを使えば, フタの一部を側面に移動できる!!

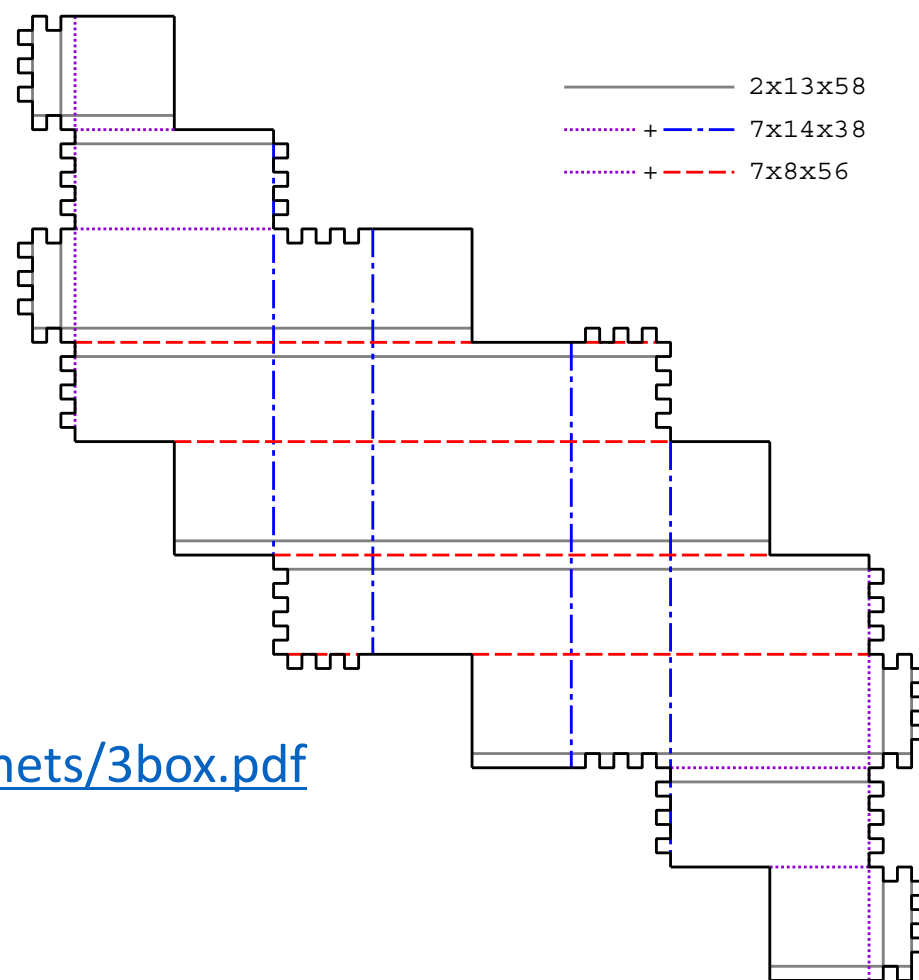
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れる
ポリオミノを発見!!

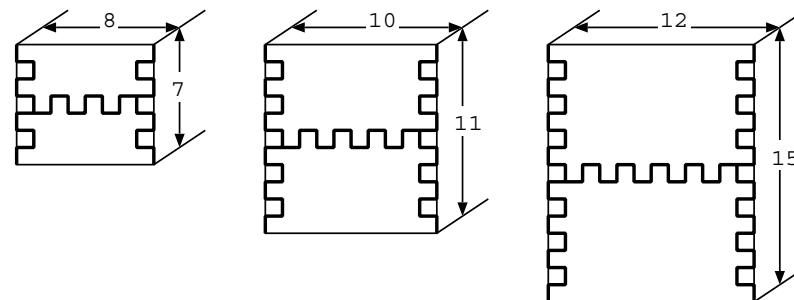
[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.



3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!



[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

[一般化!]

- 基本の箱は辺の長さに関して自由度がある.
- グザグパターンは拡張できる.

[定理]

異なる3つの箱を折れる共通の展開図は無限に存在する.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

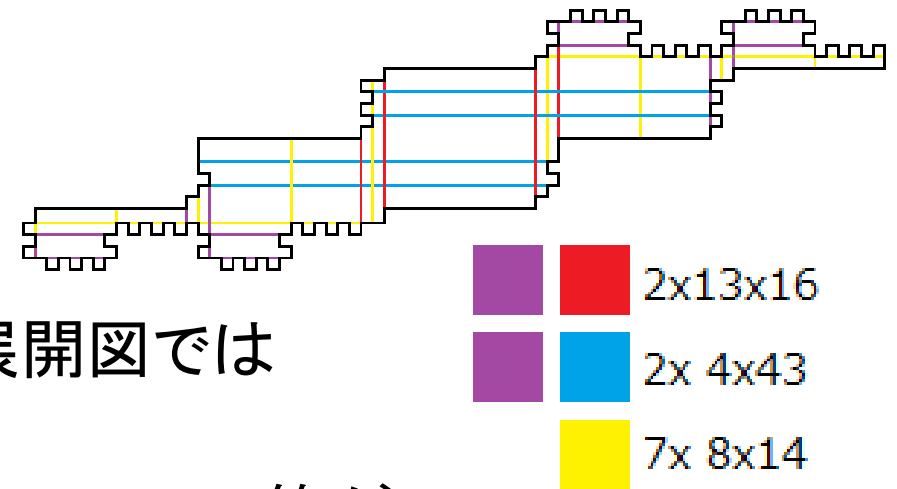
(当時の)未解決問題

- 最小の展開図は?

このアイデアで得られる「最小」の展開図では
532 個の正方形が必要である.

>> 大きさ(1,1,11), (1,2,7), (1,3,5)の3つの箱が
作れるかもしれない面積は46

(覚書き: 大きさ(1,1,5), (1,2,3)の2つの箱が折れる展開図は
面積は 22 で2263個ある.)

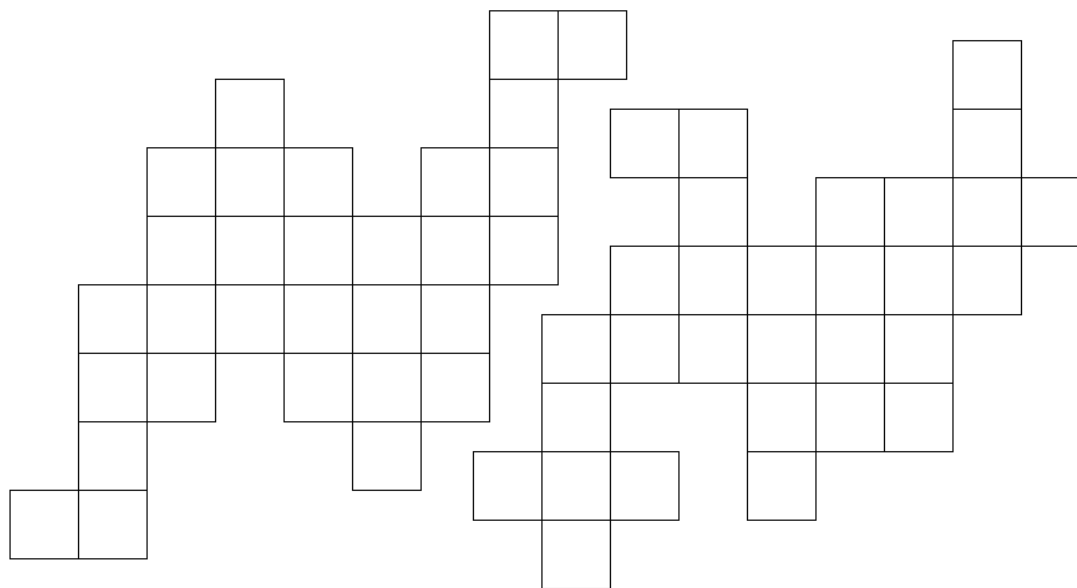


4つ以上の箱が折れる共通の展開図は？
(この値に上限はあるのか？)

2012年10月23日：白川さんからのメール

「面積30で、 $1 \times 1 \times 7$ と $5 \times 5 \times 5$ の2通りの箱を折れる展開図を見つけました。この面積は $1 \times 3 \times 3$ も作れるので、斜めを許した場合3通りの箱が折れる最小のポリオミノになる可能性があります。」

おまけ問題：
2通り折ってみよう



面積と3つ組の表(再掲)

面積	3つ組	面積	3つ組
22	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

3つの箱が作りたければ...

4つの箱が作りたければ...

既知の結果

面積30は微妙な数字...

2011年当時の松井君のプログラム:

- 面積**22**の展開図を全探索:
 - $1 \times 1 \times 5$ と $1 \times 2 \times 3$ の箱を折る2263個の展開図
- 実行時間はパソコンで**10時間**

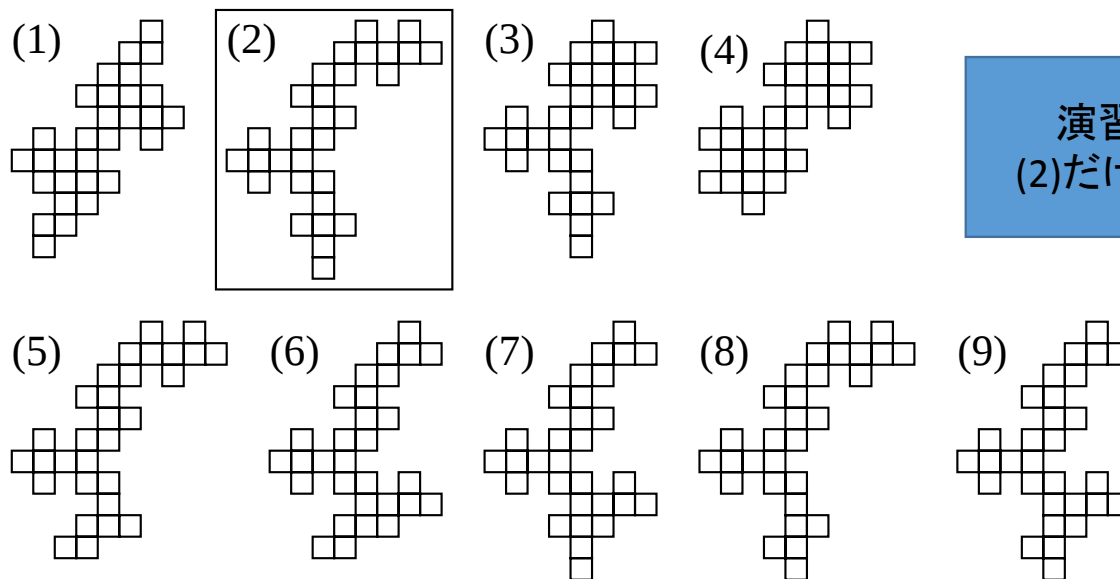
Dawei君の結果(2014年6月)

- 面積30の展開図の全探索に成功！ [Xu, Horiyama, Shirakawa, Uehara 2015]

- 大雑把な結果

- JAISTのスパコン(Cray XC 30)で二ヶ月
- $1 \times 1 \times 7$ の箱と $1 \times 3 \times 3$ の箱が折れる共通の展開図は1080個
- そのうち、 $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の三つ目の箱が折れる展開図は9個

追記:その後BDDの使用により[PCで10日]
というレベルの驚愕の高速化に成功.



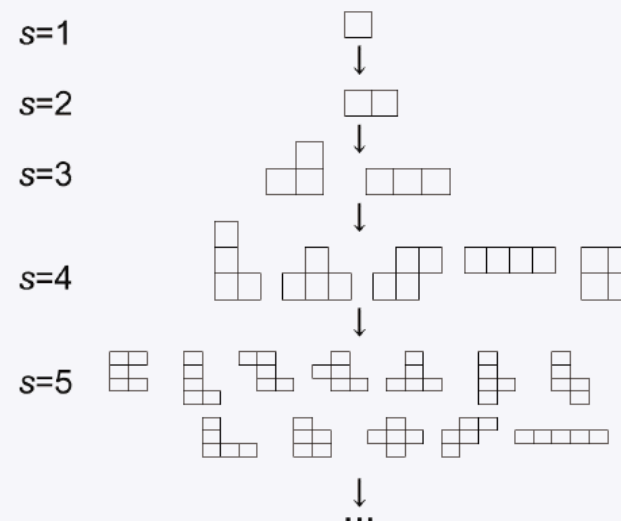
演習問題(?)
(2)だけ特別です。

どうやって見つけるのか？

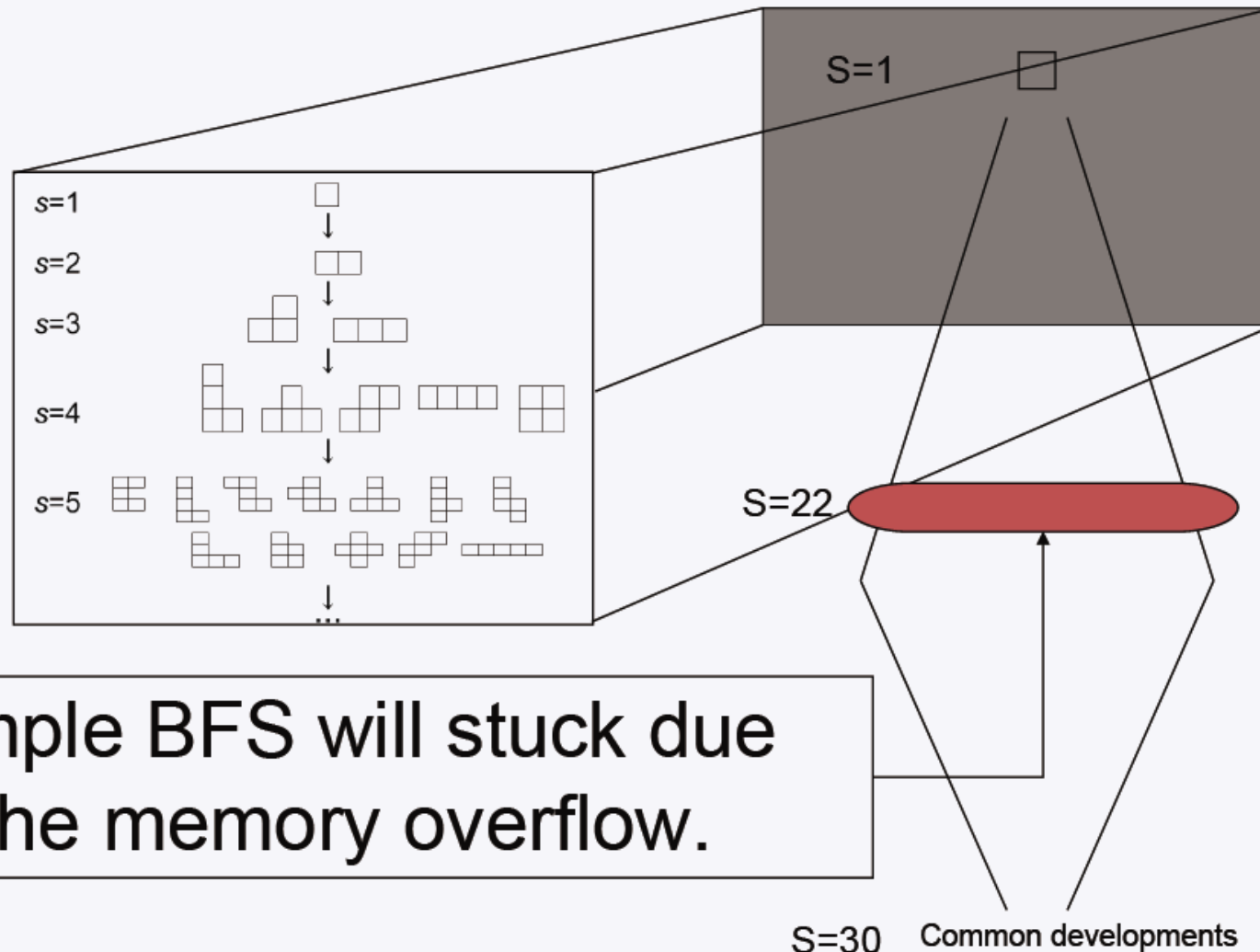
The enumerate approach



- The basic idea is similar to finding two boxes of size $1 \times 1 \times 5$ and $1 \times 2 \times 3$ [6].
- We start from a single 1 square, then add another square adjacent to it, and extend the set of partial developments, repeat this step, until 30 squares.



The simple BFS gets stuck

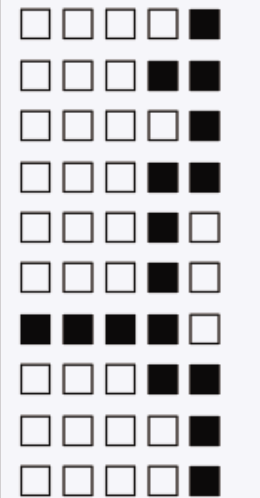


Our solution

Segmentation

Step 16 generated 7486799 developments,
Divided them into 75 groups.

development₀,
development₁,
development₂,

development_{7486798 / 75,} $x=5 \quad y=10$ 

S=1

S=16

Parallel Computing

Merge

S=30

Common developments

まとめと課題

面積	3つ組	面積	3つ組
<u>22</u>	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
<u>34</u>	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

3つの箱が作りたければ...

4つの箱が作りたければ...

既知の結果

2011年, 面積22の展開図の全探索はPCで10時間.

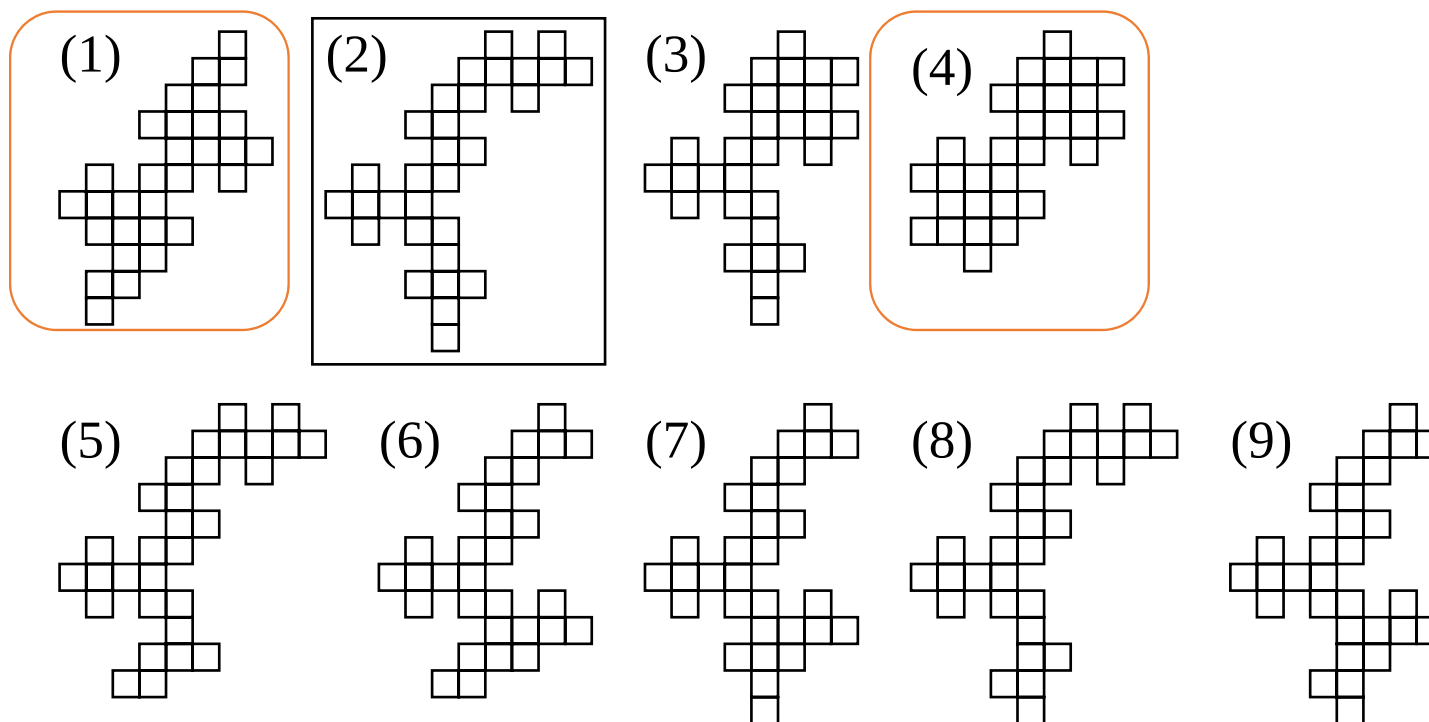
2014年, 面積30の展開図の全探索はスパコンで2ヶ月.

BDDを使うとPCで10日間.

...この調子で46まで行くのは難しいと言わざるをえないが...?

後日談

- Dawei君の博士論文の一部より
 - 回転対称な展開図に限定すれば、、、



後日談

- Dawei君の博士論文の一部より
 - 回転対称な展開図に限定すれば、、、
 1. 対称形に限定することで、探索対象を大幅に減らせる
 2. 展開図は半分サイズだけ覚えればよい
 3. 面積は2ずつ増やせる

(残念な)結論: 面積46、54ではダメでした。

- 46: $1 \times 1 \times 11$, $1 \times 2 \times 7$, $1 \times 3 \times 5$ のうち、どの2つも折れる展開図があるけれど。。。
- 54: $1 \times 1 \times 13$, $1 \times 3 \times 6$, $3 \times 3 \times 3$ も同様。

未解決問題

- 面積46や54で、3つの箱が折れる展開図はあるのか？
- 4つ以上の箱が折れる展開図は存在するのか？
- $[k$ 個以上の箱は折れない]という有限の上界はあるのか？(例えば10000通りの箱が折れる展開図などは想像しがたいけれど...。)

おまけ情報:

- 「異なるポリオミノの数」は面積45まで既知(by 白川さん on OEIS)

未解決問題が多く、若手の活躍がめざましい分野です。

発展問題

- ここで紹介しなかった問題へのアルゴリズムを考案してみよう:
問題: 多角形 P が与えられたとき、そこから箱 Q が折れるか?

既知(?)の結果:

- 一般の多角形 P と凸多面体 Q の擬多項式時間アルゴリズムがあることはある
 - $O(n^{456.5})$ 時間アルゴリズム! (Kane, et al, 2009)
- Q が「大きさ $a \times b \times c$ の箱」で P は n 多角形で糊付けも与えられたとき
 - $O((n+m)\log n)$ 時間アルゴリズム
 - 変数 m は「一つの辺が m 個にばらけている」という未知のパラメータ(Horiyama, Mizunashi 2017)
- a, b, c が不明のときはどうか?