

実践的幾何アルゴリズム

Advanced Algorithms for Computational Geometry

レポート2のコメント(と解答の一部)

担当: 上原隆平

Advanced Algorithms for Computational Geometry 実践的幾何アルゴリズム

Comments (and part of solutions) on report 2

Ryuhei Uehara

Problem 1: 凸多角形 P が頂点の列 $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ で与えられたとする. P の任意の 3 角形分割を考えると, 頂点 v_0 に弦がつながっている場合と, つながっていない場合がある. 頂点 v_0 に頂点がつながっていないとき, 必ず v_1 と v_{n-1} をつなぐ弦が存在することを証明せよ. (Let P be a convex polygon described by a sequence $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ of vertices. For a triangulation of P , the vertex v_0 is incident to a chord or not. Prove that there exists a chord joining v_1 and v_{n-1} when v_0 is not incident to a chord.)

存在しない場合は, 3角形分割にならないことが場合分けで示せる.

Problem 2: 一般の多角形 P が頂点の列 $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ で与えられたとする. P 上の 2 頂点 v_i と v_j を結ぶ直線が, P の内部だけを通るかどうかを判定するアルゴリズムを記述せよ. 計算時間はどのくらいかかるか評価せよ. (Let P be a polygon described by a sequence $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ of vertices. For a pair v_i and v_j of vertices on P , describe an algorithm that determines if the line segment joining v_i and v_j passes through inside of P . Evaluate its time complexity.)

- 符号付3角形の面積を使えばよい.

Problem 3: 講義で問題 P28(TSP) を動的計画法で解くアルゴリズムを P28-A0 で示した. このアルゴリズムの計算時間と必要な記憶領域量を評価せよ. (In the lecture, P28-A0 is the algorithm solving the problem P28 (the travelling salesperson problem) by dynamic programming. Evaluate its time complexity and space complexity.)

TSPはこの動的計画法でも多項式時間にはならない. しかし自明な $O(n!)$ のアルゴリズムよりは(指数関数的に)改善できる.

Problem 6: 生起確率が $p(0 < p < 1)$ である事象を, 成功するまで繰り返す. このときの試行の回数の期待値は $1/p$ であることを証明せよ. (We continue trying some event with probability $p(0 < p < 1)$ of occurrence until it succeeds. Then prove that the expected value of number of trials is $1/p$.)

日本の大学受験でよく出題される数列の問題. 定義通り計算すればよい.

Problem 4: 歪んだコインがあり、表が出る確率が $p(0 < p < 1)$ であったとする。このとき次のフォン・ノイマンのアルゴリズムを使うと、公平なコインを模倣できる：

1. コインを 2 回投げる。
2. 出た目が表裏なら H を、裏表なら T を出力し、それ以外ならステップ 1 に戻る。

このアルゴリズムにおいてコインを投げる回数の期待値を求めよ。また、この期待値を小さくする方法を議論せよ。(There is a biased coin such that we have its head with probability $p(0 < p < 1)$).

2回投げて成功する確率は $2p(1-p)$ で、失敗する確率は $p^2 + (1-p)^2$ である。あとは Problem 6 結果を使えば期待値が $1/2p(1-p)$ であることがわかる。ちなみにこれは $p=1/2$ のときに最大値を取る。

期待値を小さくするには、実際の計算木を描いてみればよい。

Problem 5: 乱択アルゴリズムの解析の中で、任意の定数 $0 < \epsilon < 1$ と関数 $f(n) = n^\epsilon$ について、 $f(n) \log f(n) = O(n)$ である事実を使った。これを証明せよ。ただし必要ならロピタルの定理を使ってもよい。(In analysis of randomized algorithms, we use the fact that $f(n) \log f(n) = O(n)$ for any constant $0 < \epsilon < 1$ and a function $f(n) = n^\epsilon$. Prove this. If you need it, you can use l'Hôpital's rule.)

ロピタルの定理(概要):ある自然な関数については、 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成立する。

任意の定数 $0 < \epsilon' < 1$ に対して $\log n = O(n^{\epsilon'})$ であることを示せばよい。
これは $\log n / n^{\epsilon'} \rightarrow 0$ を示せば十分である。ロピタルの定理より、
 $\log n / n^{\epsilon'} = (\log n)' / (n^{\epsilon'})' = c/n$ であるから、これは 0 に収束する。

11月30日(木曜日)は期末試験(30点満点)

- 試験範囲は7~12まで(動的計画法から乱択アルゴリズムまで)
- 選択肢: 難易度と持ち込み可／不可(今日の最後に聞きます)
 - Textbooks, copy of slides, and hand written notes (教科書/スライド/ノート)
 - Copy of slides, and hand written notes (スライド/ノート)
 - Only pens and pencils (持ち込み不可)
- 今日のオフィスアワーは特に補講はしません. 質問やコメントは 167-b まで.
- 今日の10:30-講義アンケートを実施