I469 実践的幾何アルゴリズム (Advanced Algorithms for Computational Geometry) Report (2)

2017 年度 2-1(10 月–11 月) 上原 隆平 (uehara@jaist.ac.jp)

出題 (Propose): 11 月 16 日 (木)

提出 (Deadline): 11 月 28 日 (火) 10:40

注意 (Note): レポートには氏名，学生番号，問題，解答を，すべて書くこと．紙は A4 で左上をホチキス止めすること．片面使用でも両面使用でもよい．電子メールで PDF ファイルでレポートを出してもよい (Word は不可)．その場合は件名を「I469 Report 1 (学生番号)」とし，添付するファイル名は [学生番号.pdf] とすること．(Do not forget to write your name, student ID, problems, and answers on your report. The size of paper is A4, and staple them at the top left. You can use one side or both sides of paper. You can submit your report by email in PDF format. (.doc or .docx is not allowed). In that case, the subject should be “I469 Report 1 (Student ID)” and the name of the attached file should be “student ID.pdf”.)

以下の問題から 2 問以上選んで解け（各 10 点）．(Choose and solve two or more problems from below (10 points each).)

Problem 1: 凸多角形 P が頂点の列 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ で与えられたとする．P の任意の 3 角形分割を考えると，頂点 v_0 に弦がつながっている場合と，つながっていない場合がある．頂点 v_0 に頂点がつながっていないとき，必ず v_1 と v_{n-1} をつなぐ弦が存在することを証明せよ．(Let P be a convex polygon desribed by a sequence $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ of vertices. For a triangulaton of P, the vertex v_0 is incident to a chord or not. Prove that there exists a chord joining v_1 and v_{n-1} when v_0 is not incident to a chord.)

Problem 2: 一般の多角形 P が頂点の列 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ で与えられたとする．P 上の 2 頂点 v_i と v_j を結ぶ直線が，P の内部だけを通るかどうかを判定するアルゴリズムを記述せよ．計算時間はどのくらいかかるか評価せよ．(Let P be a polygon desribed by a sequence $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ of vertices. For a pair v_i and v_j of vertices on P, describe an algorithm that determines if the line segment joining v_i and v_j passes through inside of P. Evaluate its time complexity.)

Problem 3: 講義で問題 P28(TSP) を動的計画法で解くアルゴリズムを P28-A0 で示した．このアルゴリズムの計算時間と必要な記憶領域量を評価せよ．(In the lecture, P28-A0 is the algorithm solving the problem P28 (the travelling salesperson problem) by dynamic programming. Evaluate its time complexity and space complexity.)

Problem 4: 歪んだコインがあり，表が出る確率が $p(0 < p < 1)$ であったとする．このとき次のフォン・ノイマンのアルゴリズムを使うと，公平なコインを模倣できる：

1. コインを 2 回投げる．
2. 出た目が表裏なら H を，裏表なら T を出力し，それ以外ならステップ 1 に戻る．

このアルゴリズムにおいてコインを投げる回数の期待値を求めよ．また，この期待値を小さくする方法を議論せよ．(There is a biased coin such that we have its head with probability $p(0 < p < 1)$. Then we can enumerate a fair coin by the following Von Neumann’s algorithm:

1. Toss the coin two times.

2. If it comes (head, tail), output H, (tail, head), output T, go to the first step otherwise.

Calculate the expected value of the number of coin tossing in this algorithm. Discuss how can you reduce this expected value.)

Problem 5: 乱択アルゴリズムの解析の中で，任意の定数 $0 < \epsilon < 1$ と関数 $f(n) = n^{\epsilon}$ について，$f(n) \log f(n) = O(n)$ である事実を使った．これを証明せよ．ただし必要ならロピタルの定理を使ってもよい．(In analysis of randomized algorithms, we use the fact that $f(n) \log f(n) = O(n)$ for any constant $0 < \epsilon < 1$ and a function $f(n) = n^{\epsilon}$. Prove this. If you need it, you can use l'Hôpital's rule.)

Problem 6: 生起確率が $p(0 < p < 1)$ である事象を，成功するまで繰り返す．このときの試行の回数の期待値は $1/p$ であることを証明せよ．(We continue trying some event with probability $p(0 < p < 1)$ of occurrence until it succeeds. Then prove that the expected value of number of trials is $1/p$.)