

実践的幾何アルゴリズム

Advanced Algorithms for Computational Geometry

13. 最新のアルゴリズムの話題から: 計算折り紙その1

担当: 上原隆平

Advanced Algorithms for Computational Geometry 実践的幾何アルゴリズム

13. Recent Topics in Advanced Algorithm: Computational Origami I

Ryuhei Uehara

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙(ORIGAMI)
 - 1500年代, おそらく紙の普及とともに自然発生的に...?アジアで...
 - 現在, ORIGAMI はすでに英語化していて, 書店にも ORIGAMI コーナーがある.
 - 折り紙っぽいものも...

「折ってない」「紙じゃない」
Origami も増えてきた... おそらくNSFのビッグファンドのせいだと思ってますが...?



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- 折り紙の急激な発展

- 1980年代~1990年代, 折り紙が急速に複雑化した.



前川の「悪魔」
1980年頃発表
(正方形1枚から
折れる！)



川崎ローズ
1985年頃発表
(正方形1枚
から折れる！)



Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
(1×10の長さの長方形の紙
1枚から折れる！)

計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- コンピュータの利用と折り紙への応用

- 1990年代以降, コンピュータを用いた折り紙デザインが発展



Robert Lang のハト時計
1987年頃発表
(1×10 の長さの長方形の紙
1枚から折れる！)



舘知宏のOrigamizer
2007年発表
(長方形の紙1枚から
10時間くらいで折れる)



三谷純の回転対称な折り紙
2010年頃発表
(長方形の紙1枚から折れる)

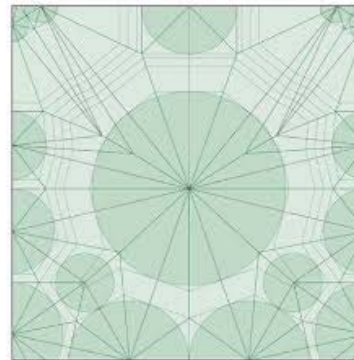
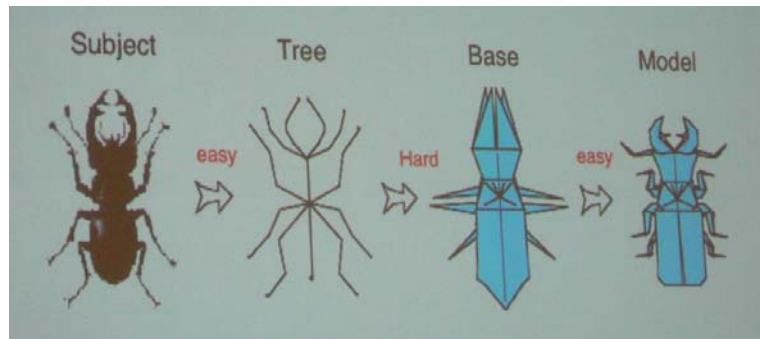
2016年、
シン・ゴジラと
Death Note の
両方に登場!!

2017年、
「正解するカド」に
ちょっと登場!!

折り紙とコンピュータサイエンス

- 近年、むしろ海外で脚光をあびている
- 方法論の確立とソフトウェアの開発:
 - 1980年代: 前川さんの「悪魔」
 - CAD的に「パーツ」を組み合わせる
コンプレックス折り紙の発祥
 - 2000年代: Lang さんの TreeMaker
 - 与えられた「木構造」(距離つき)を正方形上に展開するソフト
 - さまざまな最適化問題を現実的な時間で計算

NP完全問題も
解いている



折り紙の科学に特化した国際会議

1. 1989年12月 @ Italy
The International meeting of Origami Science and Technology
2. 1994年 @ 滋賀県大津
3. 2001年3月 @ アメリカ
The International meeting of Origami Science, Mathematics, and Education (3OSME)
4. 2006年9月8日-10日 @ アメリカ
4OSME
5. 2010年7月13日-17日 @ シンガポール
5OSME
6. 2014年8月10日-13日 @ 東大
6OSME
7. 2018年9月5日-7日: 7OSME @ Oxford, UK!



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

- “Computational Origami”の提案

1990年代~

計算幾何学の分野で「計算幾何」や「最適化問題」として「折り」の問題をとらえ始める

この分野の**超**著名な研究者:Erik D. Demaine

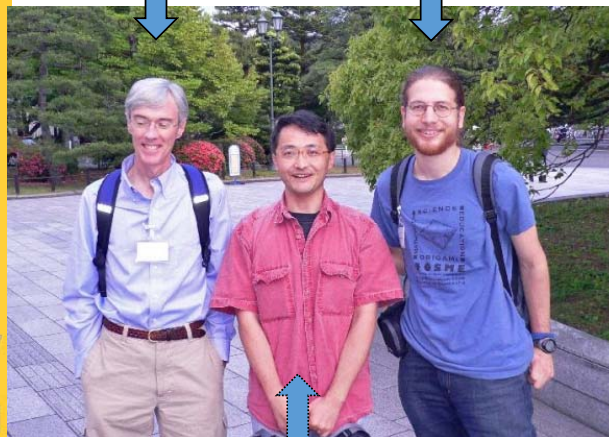
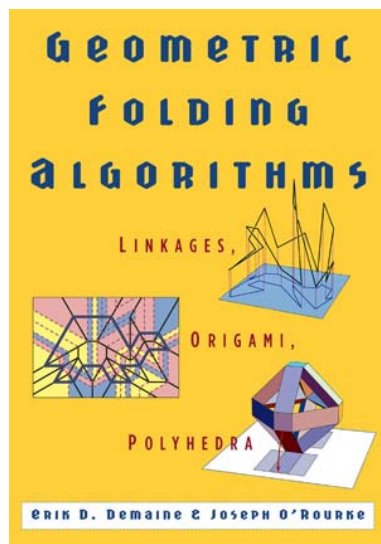
- 1981年生まれ
- 2001年, 20歳でカナダで博士号を取得し,
そのままMITの教員になり, 現在に至る
- 彼の博士論文のテーマが計算折り紙であった.
- 今でもMITのOrigami研究を強力に牽引(ロボットなど)



計算折り紙(Computational ORIGAMI)とは？

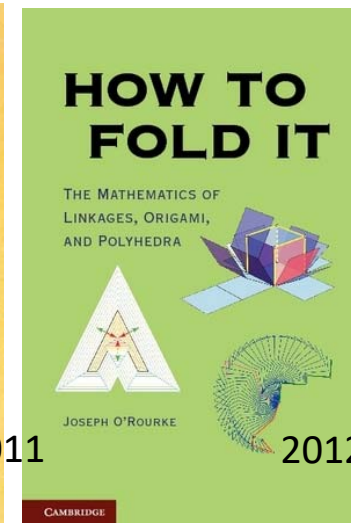
• 文献紹介

Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra
by J. O'Rourke and E. D. Demaine, 2007.



著者

日本語に訳しました (2009).



今日のトピック

展開図とそこから折れる凸多面体の研究

- 展開図と立体のとても悩ましい関係: 最大の未解決問題
- 与えられた展開図を折って作れる(凸)多面体をどうやって計算するか?
 - 分野としては
 - 計算幾何学
 - グラフ理論とグラフアルゴリズム
- の両方にまたがる
- 数学的な特徴づけ/アルゴリズム/計算パワーを総動員
- 「複数の箱を折る」話

次回: もっと計算量っぽい

未解決問題が多く、若手の活躍がめざましい分野です.

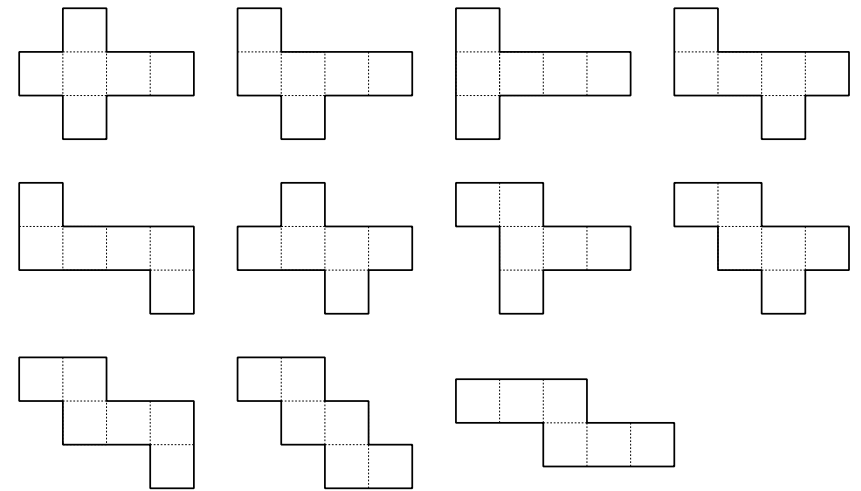
準備. (辺)展開図とは？

- (一般)展開図: 多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
 - 連結であること
 - 重なりを持たない単純多角形であること(便宜上、直線の集まりとする)
- (辺)展開図: 多面体の辺に沿って切り広げた多角形
 - 展開の境界部分は多面体の辺からなる
 - 日本の小学校で習うのは(なぜか)こちら

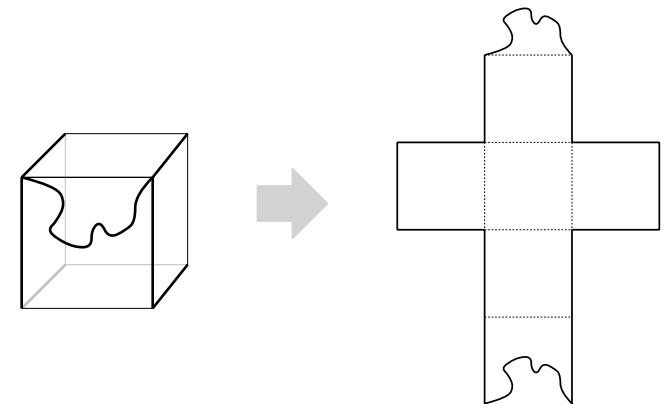
★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

準備体操. 展開図の基礎知識: パズル

- 「立方体の展開図は11通りである」と小学校で習う. しかしこれは, 辺展開図に限定している. 実際には**無限に存在**する.
 - **パズル**: 立方体の展開図で, 正方形6つで作られるものを, 上記の11通り以外に見つけて!
1. 大きさが同じでなくてもよい場合は?
 2. 大きさがすべて同じ場合は?



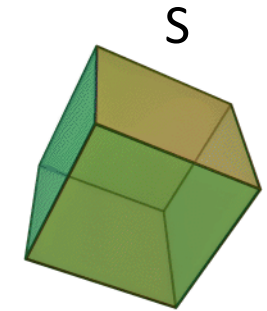
紙風船でも折って考えてみよう!



Special Thanks: 岩井政佳氏

準備. 展開図の基礎知識

凸多面体 S の頂点と辺から構成されるグラフを G とする



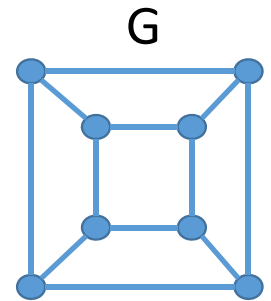
[全域木定理(その1)]

S の辺展開におけるカットラインは、 G 上の全域木である

[証明]

- すべての点を訪れること:
カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない

系: 正多面体では、
すべての辺展開
においてカットの
長さは同じ



[全域木定理(その2)]

S の一般展開におけるカットラインは、 S 上ですべての頂点を張る木である

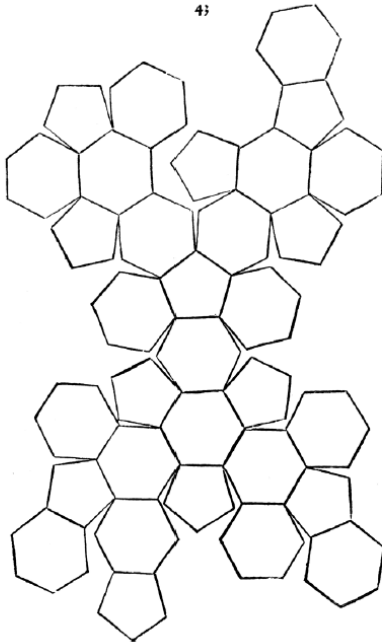
注: 広げたときに
重ならないかどう
かは、別問題.

展開図の簡単な歴史

- アルブレフト・デューラーの『画家マニュアル』(1525)

S In anders das mach auß zweinüzig sechszeiter flachen seibern/ gleichförmig vnd windlich/ so man darzußut zwölz fünfzeiter flacher seiber/ so die gleichförmig gegen den sechszeiter seiden sind/ vnd in jenen selbe auch gleich windlich vnd ebenlich an einander gefüget/ den ich das offen im plano hernach hab aufgetrissen/ So man dann das alles zusammen schließ/ so wirt ein corpus daraus/ das gewinner insey vnd sechzig eck/ vnd nichtig schwarz für seuen/ die Corpus rüret in einer helen kugel mit allen seinen ecken an.

43



- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた...?

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

展開図の簡単な歴史

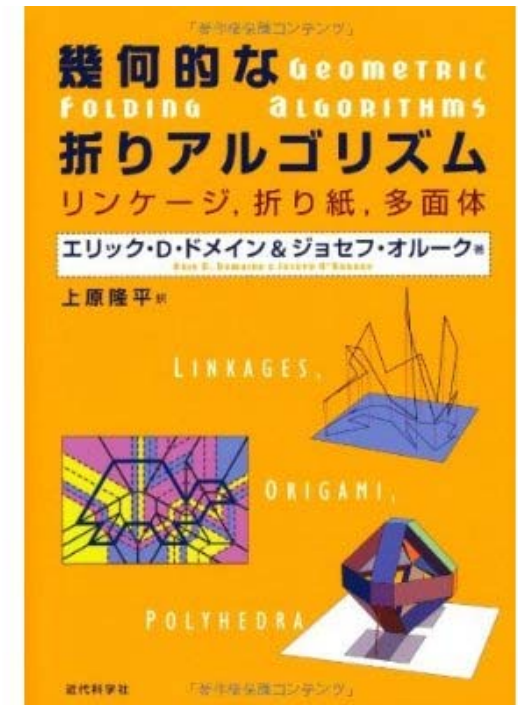
未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない) 未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つかっていない(当然?)
- 凹多面体なら反例がある
(どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能
(一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
実験的にはほぼ確率1で重なってしまう

まとめ: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない



もし興味があれば...

展開図の簡単な歴史

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

まとめ: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

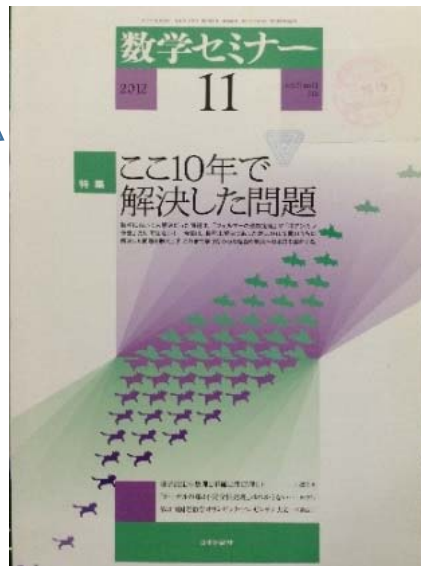
本研究の興味の対象:

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

複数の箱が折れる共通の展開図

- 2通りの箱が折れる共通の展開図
 - 3通りの箱が折れる共通の展開図
- そして....残された未解決問題たち

この雑誌に
載ってます！



このミステリー(?)の中でメイン
トリックに使われました！

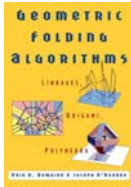
主な文献

- Dawei Xu, Takashi Horiyama, Toshihiro Shirakawa, Ryuhei Uehara: Common Developments of Three Incongruent Boxes of Area 30, *COMPUTATIONAL GEOMETRY: Theory and Applications*, Vol. 64, pp. 1-17, August 2017.
- Toshihiro Shirakawa and Ryuhei Uehara: Common Developments of Three Incongruent Orthogonal Boxes, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, Vol. 23, No. 1, pp. 65-71, 2013.
- Zachary Abel, Erik Demaine, Martin Demaine, Hiroaki Matsui, Guenter Rote and Ryuhei Uehara: Common Developments of Several Different Orthogonal Boxes, *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG' 11)*, pp. 77-82, 2011/8/10-12, Toronto, Canada.
- Jun Mitani and Ryuhei Uehara: Polygons Folding to Plural Incongruent Orthogonal Boxes, *Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2008)*, pp. 39-42, 2008/8/13.

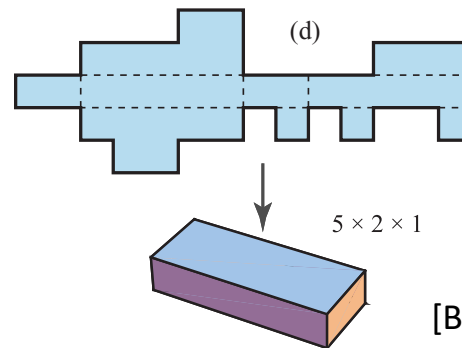
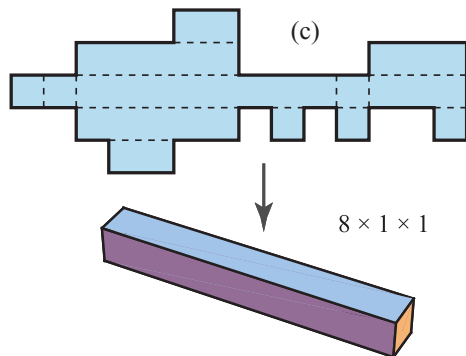
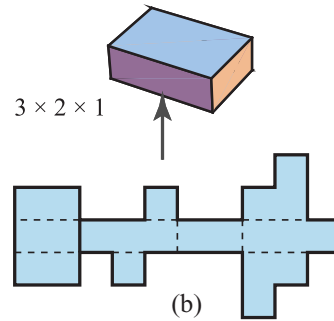
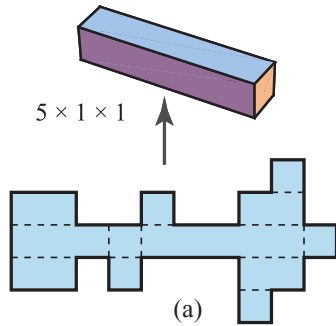
いくつかの展開図は以下で公開:

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/index-e.html>

文献の翻訳中のこと...



- 2種類の箱が折れる展開図が2つ載っていた;



- これは例外的なのか？
- 3つあるいはそれ以上の箱を折れる展開図は存在しないのか？



Biedl「3つ以上は無いと思うわ。」

[Biedl, Chan, Demaine, Demaine, Lubiw, Munro, Shallit, 1999]

2種類の箱が折れる展開図

文献 [Uehara, Mitani 2008] でランダムに箱を展開し続けるアルゴリズムを実装して実行し続ける;

- 2種類の箱が折れる展開図:
 1. とてもたくさん(～9000)あった
(スパコン使用(SGI Altix 4700))
 2. 理論的には無限に多くある

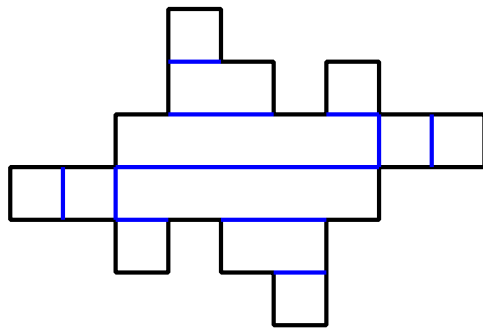


その前に:

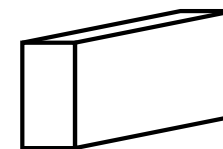
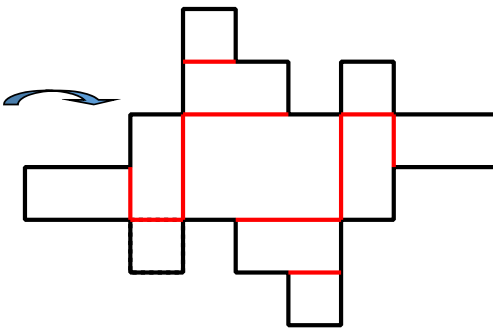
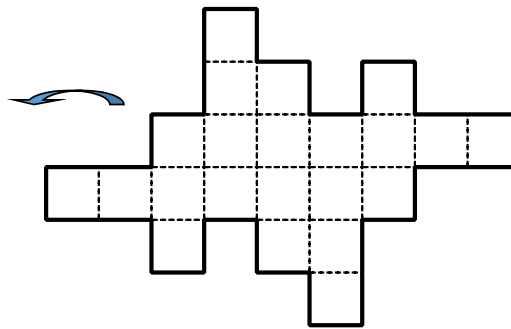
例

$$1 \times 1 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 11 \quad (\text{表面積: } 22)$$

2種類の異なる箱が折れるポリオミノ(単位正方形の集まり)は...



$$1 \times 1 \times 5 = a \times b \times c$$



$$1 \times 2 \times 3 = a' \times b' \times c'$$

- とりあえず単位正方形に沿って切る／折る
- 表面積:
$$2(ab + bc + ca)$$
- 必要条件:

$$ab + bc + ca = a'b' + b'c' + c'a'$$

等式を満たす3つ組が多い
ほど望みがありそう

下準備：表面積と、それを満たす三つ組の表

3つの箱の共通の展開図を見つけるなら

4つの箱の共通の展開図を見つけるなら

面積	三つ組	面積	三つ組
<u>22</u>	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
<u>34</u>	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

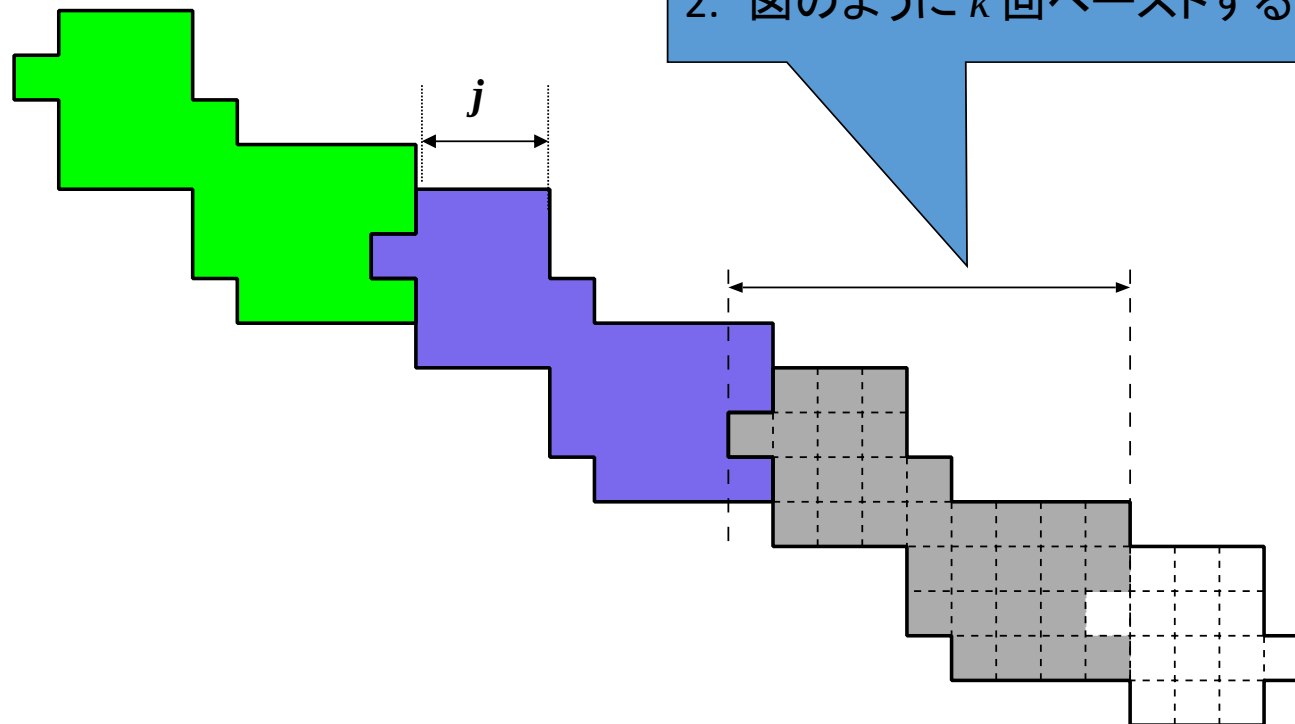
既知の結果

2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

[証明]

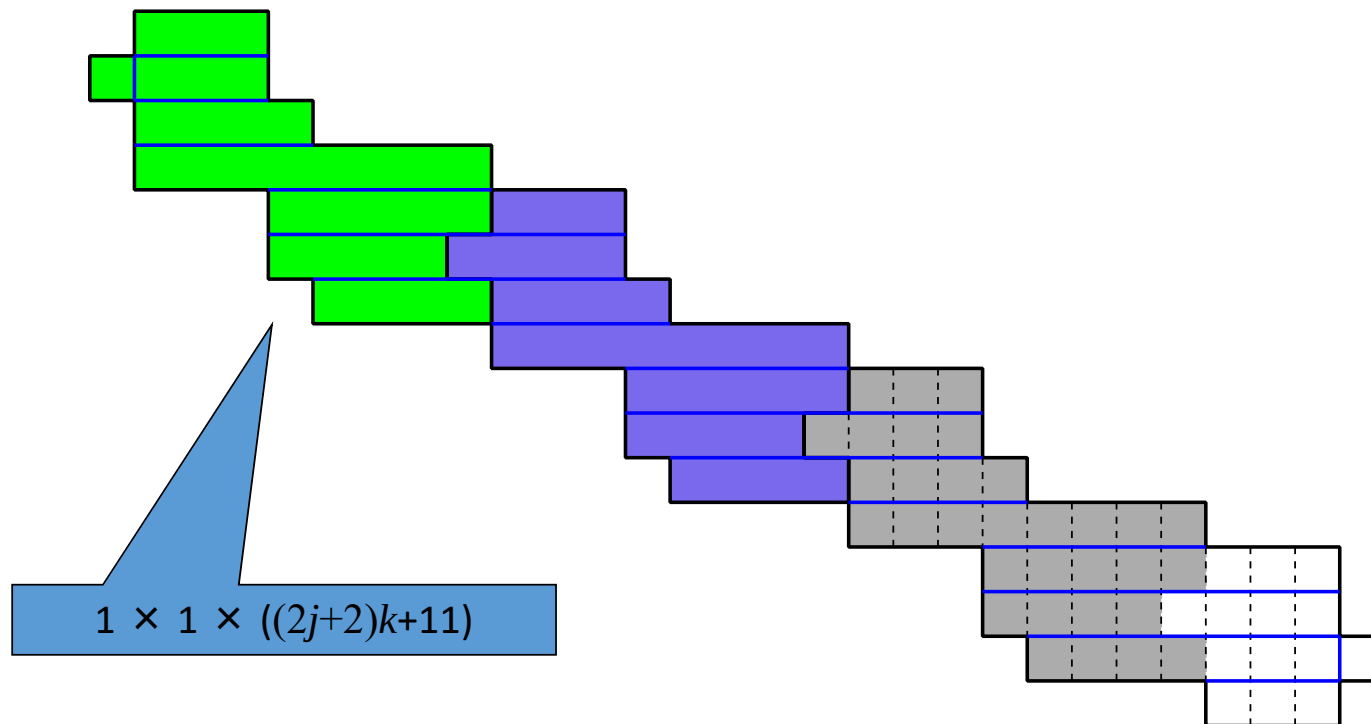
1. この部分をコピーして
2. 図のように k 回ペーストする



2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

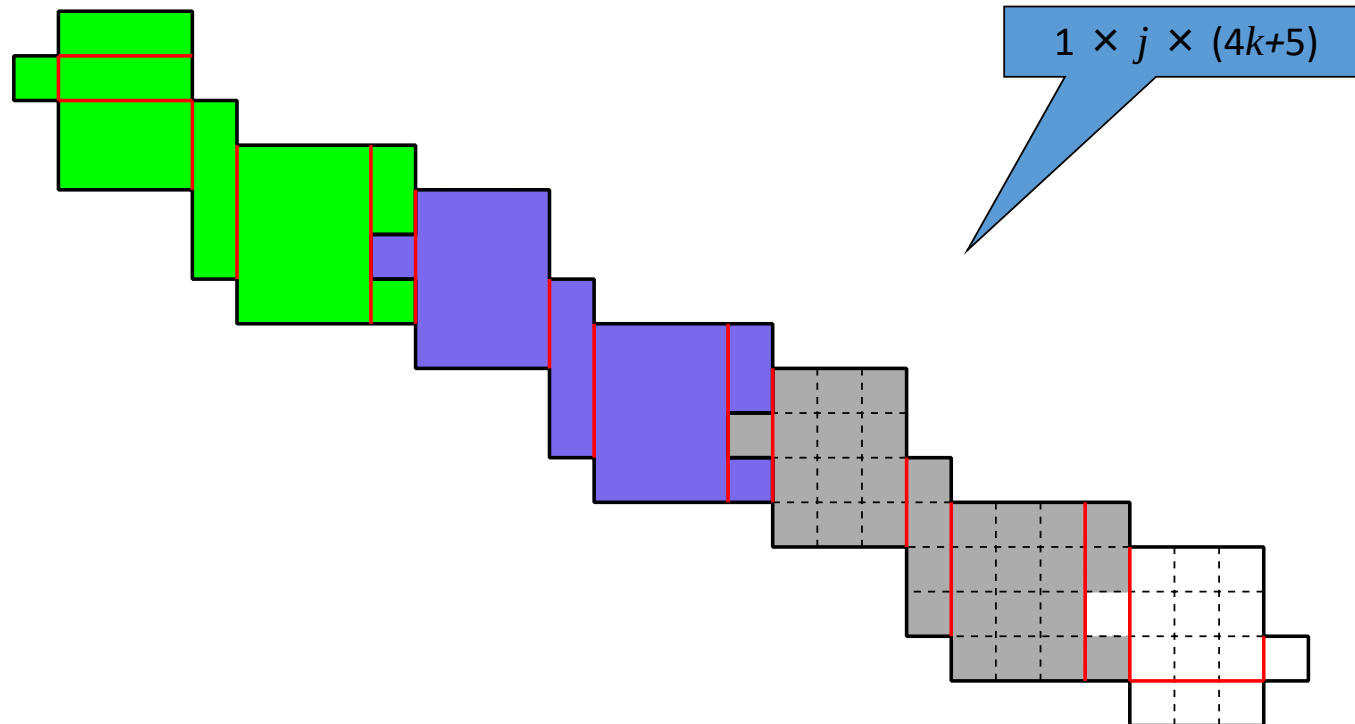
[証明]



2つの箱の共通の展開図

[定理] 2つの箱の共通の展開図は無限に存在する.

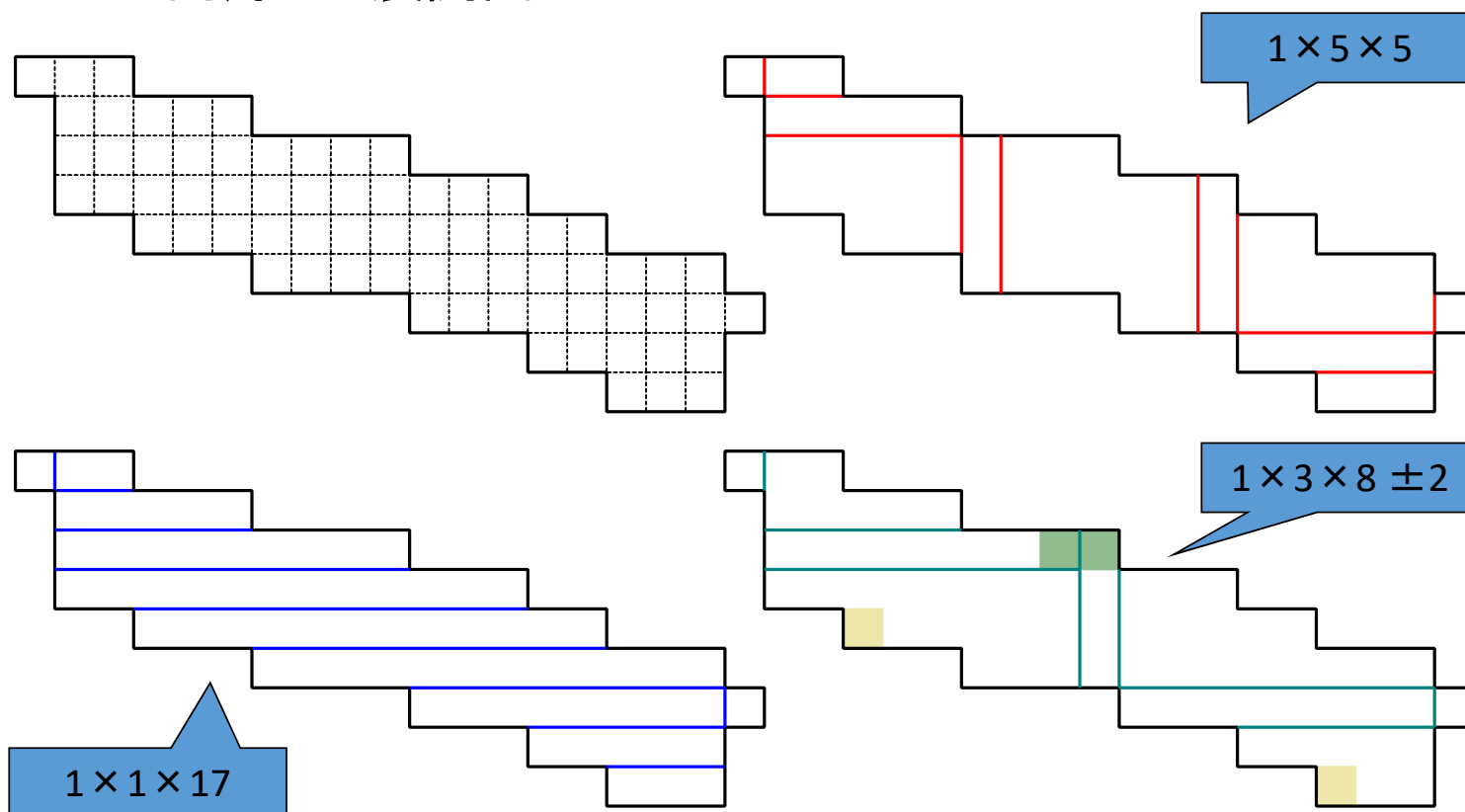
[証明]



3つの箱の共通の展開図(?)

3つの異なる箱が折れる共通の展開図は存在するのか？

- 肉薄した展開図...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

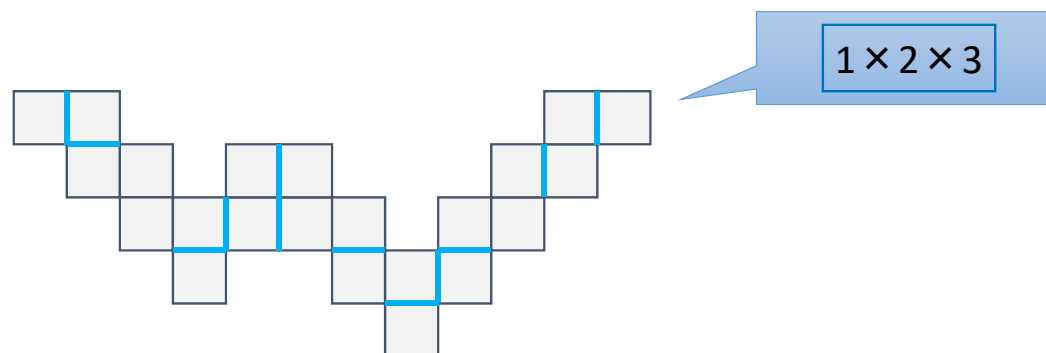
文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である.
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、珠玉の展開図が...

3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

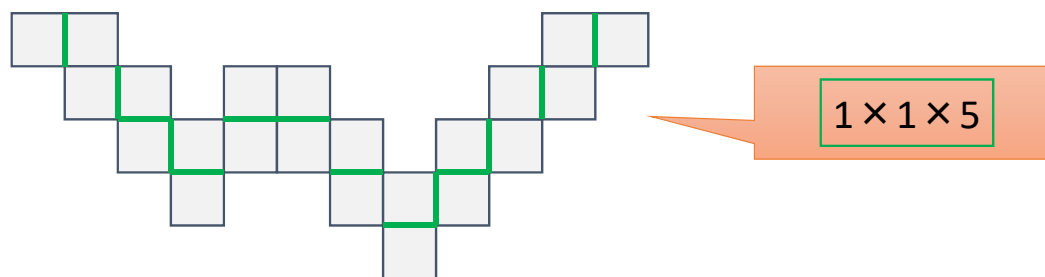
- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である.
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、**珠玉**の展開図が...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である.
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、**珠玉**の展開図が...



3つの箱の共通の展開図(?)への挑戦

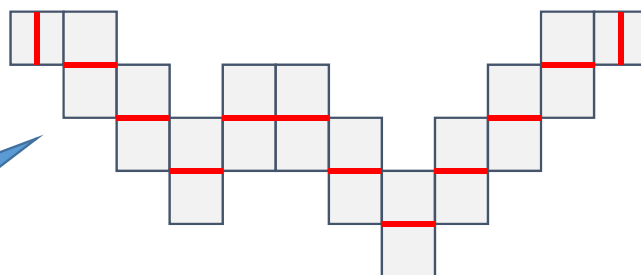
文献[Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011]にて

- 大きさ $1 \times 1 \times 5$ の箱と $1 \times 2 \times 3$ の箱が折れる面積22の展開図の個数は全部で2263個である。
当時のプログラム: 実行時間は通常のPCで10時間程度
- 2263個の展開図の中にひとつだけ、珠玉の展開図が...

おまけ問題:
3通り折ってみよう

体積0の「箱」はズルくないか?

サイズ $\frac{1}{2}$, が出てくるのがイヤなら4つに分割すればオッケー



両側を除いてどこも2つずつ正方形が縦に並んでいるので

$1 \times 11 \times 0$

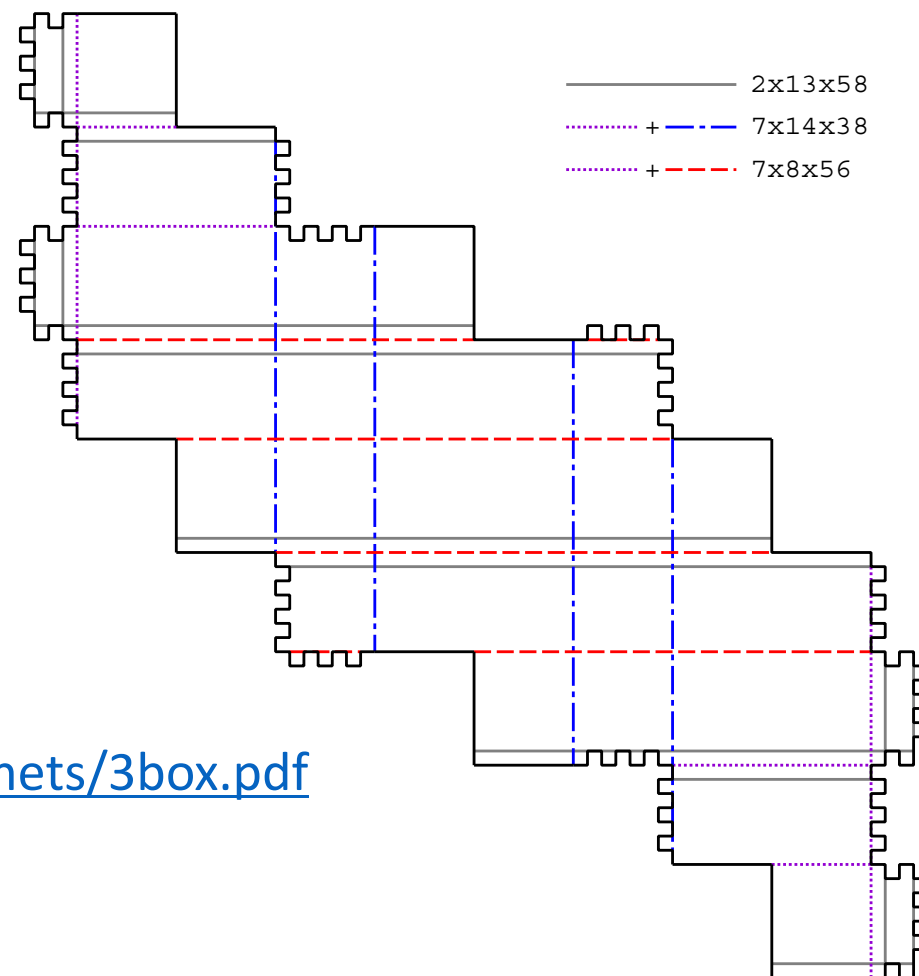


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れる
ポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

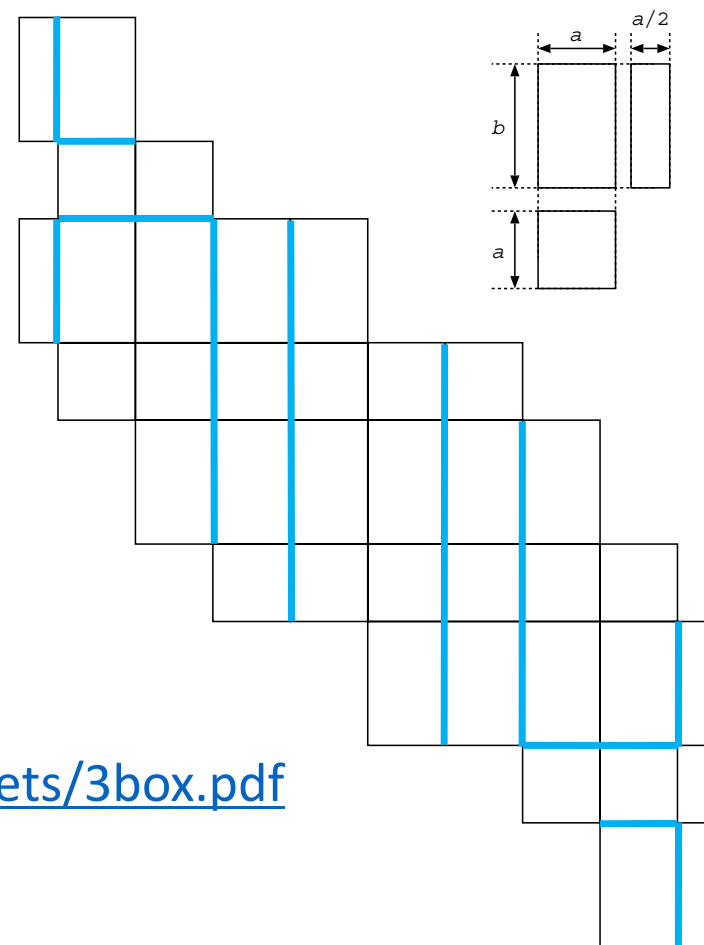


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)が
ついに3つの箱を折れる
ポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図
図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

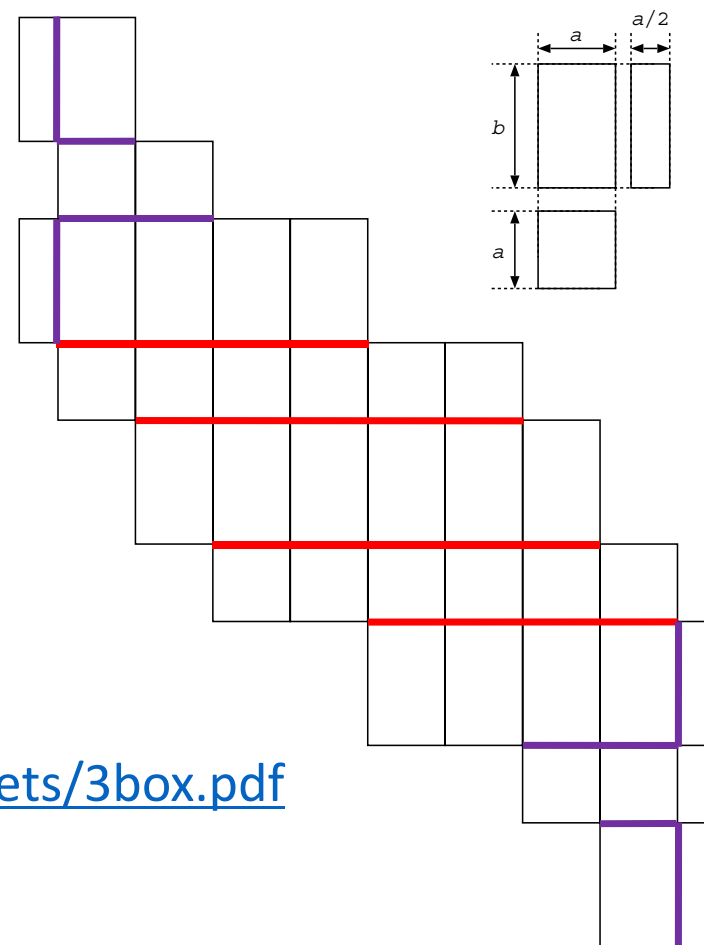


3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

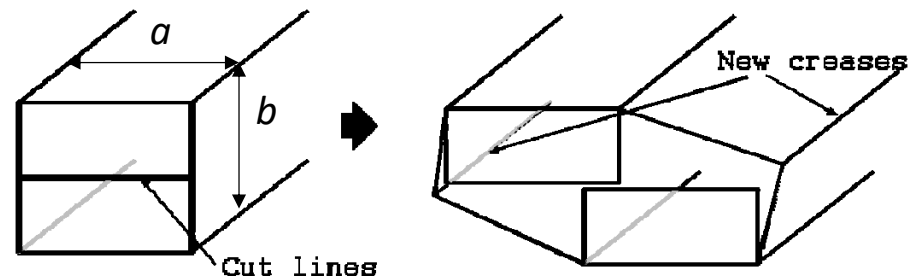
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>にもあります.



3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れるポリオミノを発見!!

[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.



こんな感じで箱をつぶせばなんとかなりそう!?

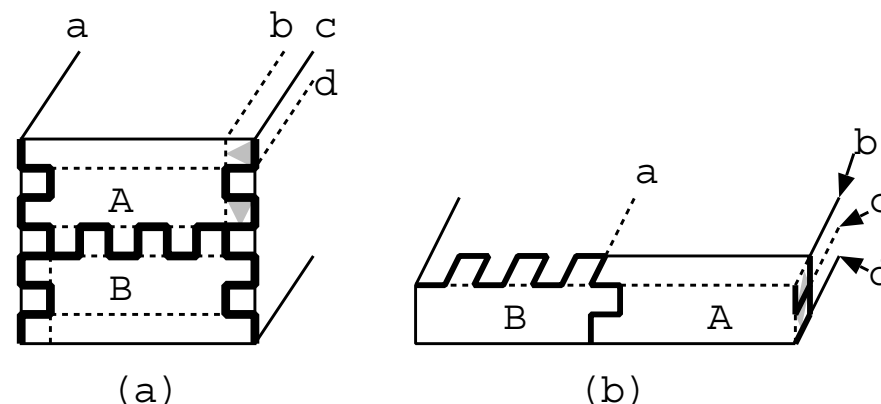
[失敗!!!]

このアイデアは $a=2b$ のときだけ, つまり 1×2 の長方形を 2×1 の長方形にするときしかうまくいかない...

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf> にもあります.

3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れるポリオミノを発見!!



[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

[できる(うまくやれば)!!]
このパターンを使えば, フタの一部を側面に移動できる!!

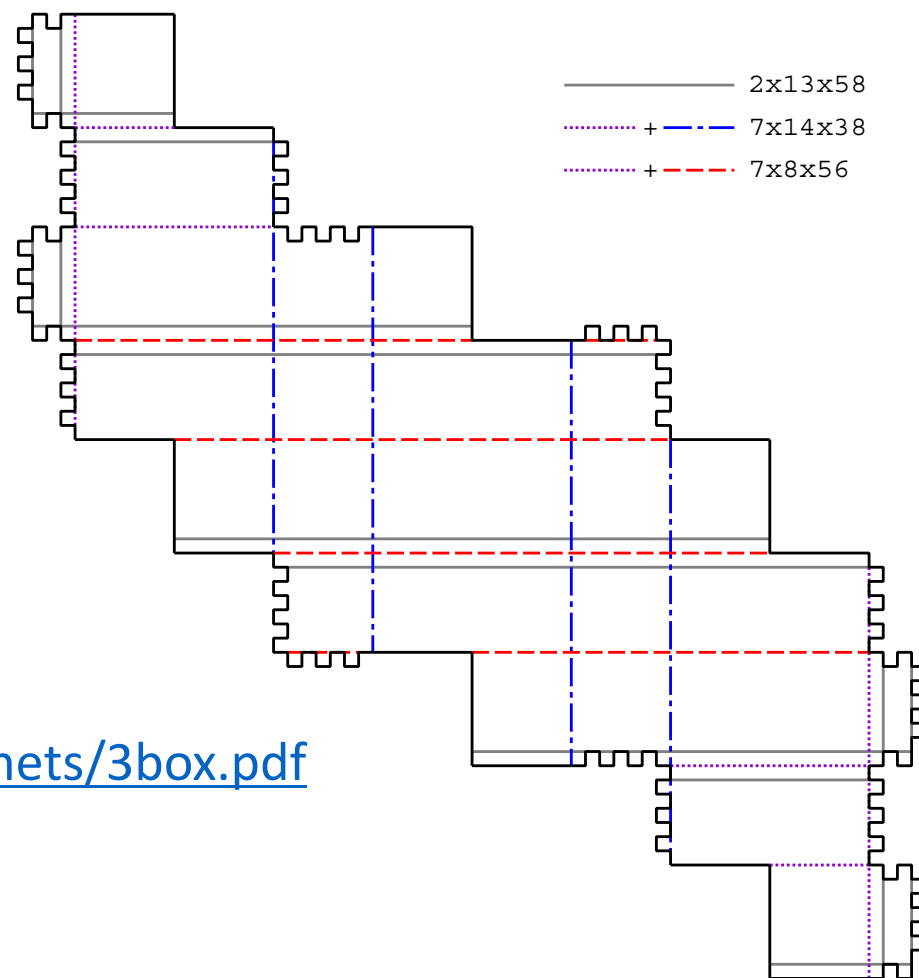
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに**3つの箱**を折れる
ポリオミノを発見!!

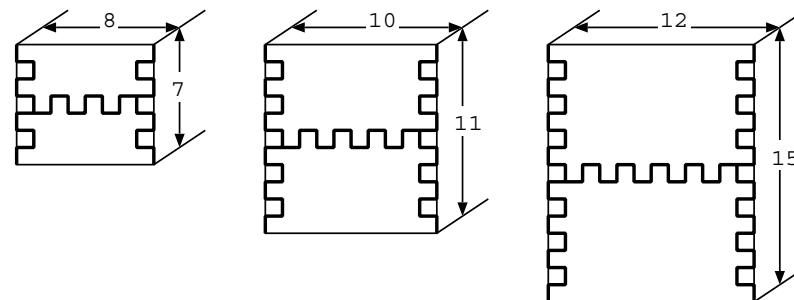
[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.



3つの箱の共通の展開図の発見(1)

- 2012年2月, 白川俊博氏(と上原)がついに3つの箱を折れるポリオミノを発見!!



[基本アイデア] 2つの箱の共通の展開図から, もう1つなんとかして折る.

[一般化!]

- 基本の箱は辺の長さに関して自由度がある.
- グザグパターンは拡張できる.

[定理]

異なる3つの箱を折れる共通の展開図は無限に存在する.

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>
にもあります.

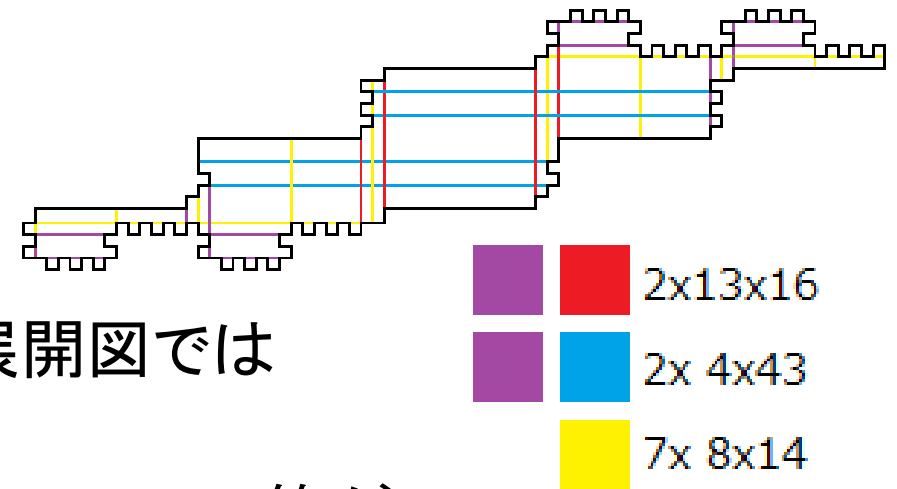
(当時の)未解決問題

- 最小の展開図は?

このアイデアで得られる「最小」の展開図では
532 個の正方形が必要である.

>> 大きさ(1,1,11), (1,2,7), (1,3,5)の3つの箱が
作れるかもしれない面積は46

(覚書き: 大きさ(1,1,5), (1,2,3)の2つの箱が折れる展開図は
面積は 22 で2263個ある.)

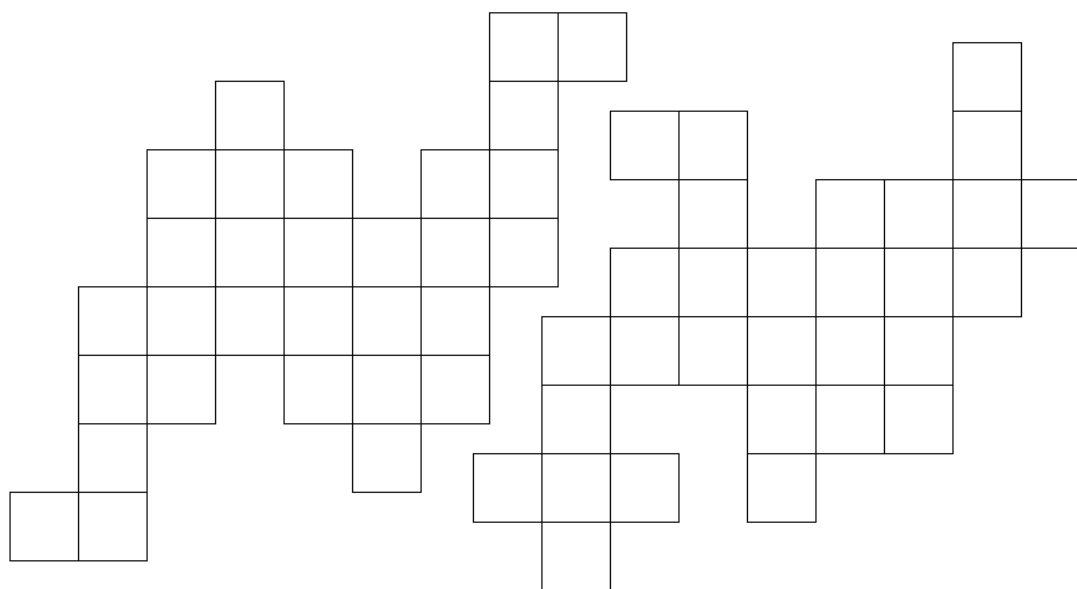


4つ以上の箱が折れる共通の展開図は？
(この値に上限はあるのか？)

2012年10月23日：白川さんからのメール

「面積30で、 $1 \times 1 \times 7$ と $5 \times 5 \times 5$ の2通りの箱を折れる展開図を見つけました。この面積は $1 \times 3 \times 3$ も作れるので、斜めを許した場合3通りの箱が折れる最小のポリオミノになる可能性があります。」

おまけ問題：
2通り折ってみよう



面積と3つ組の表(再掲)

面積	3つ組	面積	3つ組
22	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

3つの箱が作りたければ...

4つの箱が作りたければ...

既知の結果

2011年当時の松井君のプログラム:

- **面積22**の展開図を全探索:
 - $1 \times 1 \times 5$ と $1 \times 2 \times 3$ の箱を折る2263個の展開図
- 実行時間はパソコンで**10時間**

面積30は微妙な数字...

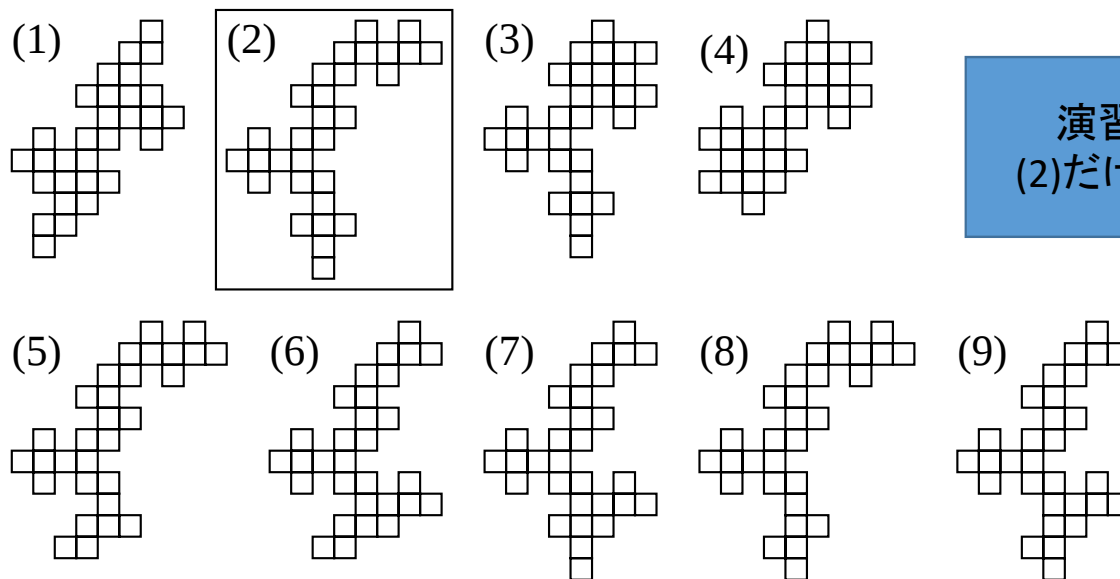
Dawei君の結果(2014年6月)

- 面積30の展開図の全探索に成功！ [Xu, Horiyama, Shirakawa, Uehara 2015]

- 大雑把な結果

- JAISTのスパコン(Cray XC 30)で二ヶ月
- $1 \times 1 \times 7$ の箱と $1 \times 3 \times 3$ の箱が折れる共通の展開図は1080個
- そのうち、 $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の三つ目の箱が折れる展開図は9個

追記:その後BDDの使用により[PCで10日]
というレベルの驚愕の高速化に成功.



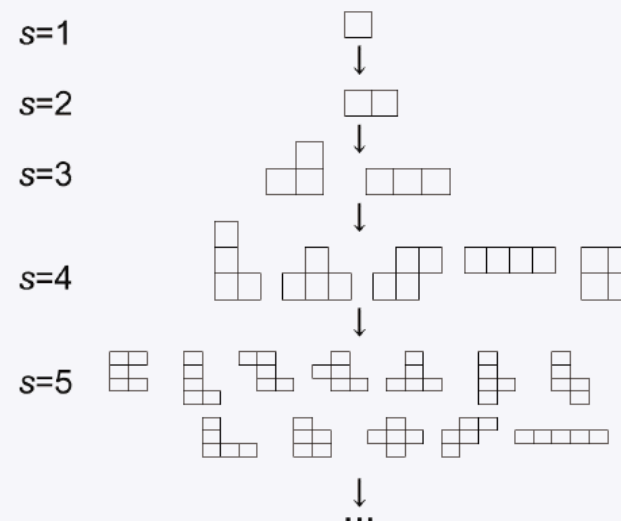
演習問題(?)
(2)だけ特別です。

どうやって見つけるのか？

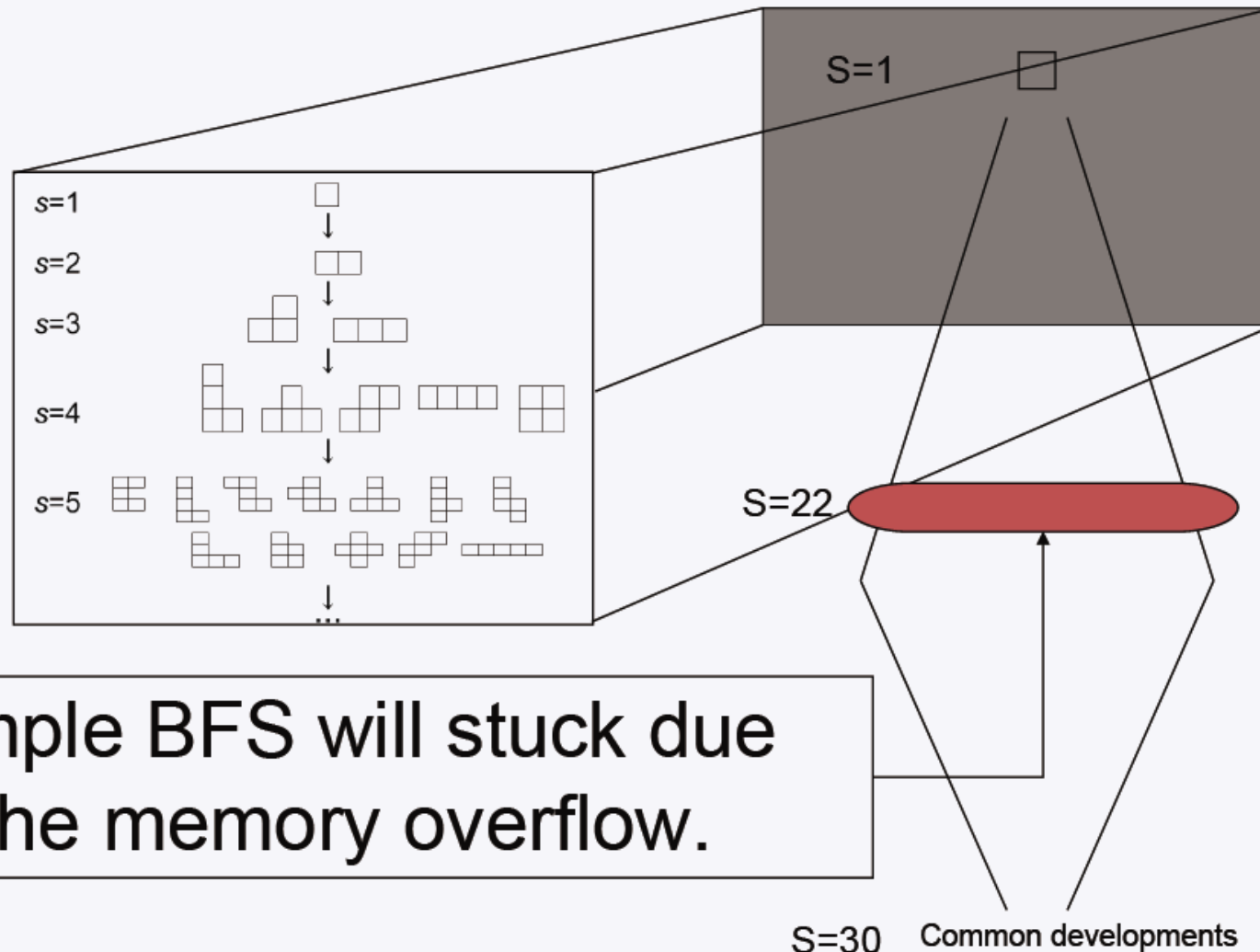
The enumerate approach



- The basic idea is similar to finding two boxes of size $1 \times 1 \times 5$ and $1 \times 2 \times 3$ [6].
- We start from a single 1 square, then add another square adjacent to it, and extend the set of partial developments, repeat this step, until 30 squares.



The simple BFS gets stuck



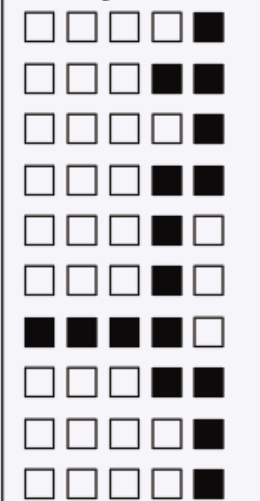
Simple BFS will stuck due to the memory overflow.

Our solution

Segmentation

Step 16 generated 7486799 developments,
Divided them into 75 groups.

development₀,
development₁,
development₂,

development_{7486798 / 75,} $x=5 \quad y=10$ 

S=1

5

S=16

Parallel Computing

Merge

S=30

Common developments

まとめと課題

面積	3つ組	面積	3つ組
22	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

3つの箱が作りたければ...

4つの箱が作りたければ...

既知の結果

2011年, 面積22の展開図の全探索はPCで10時間.

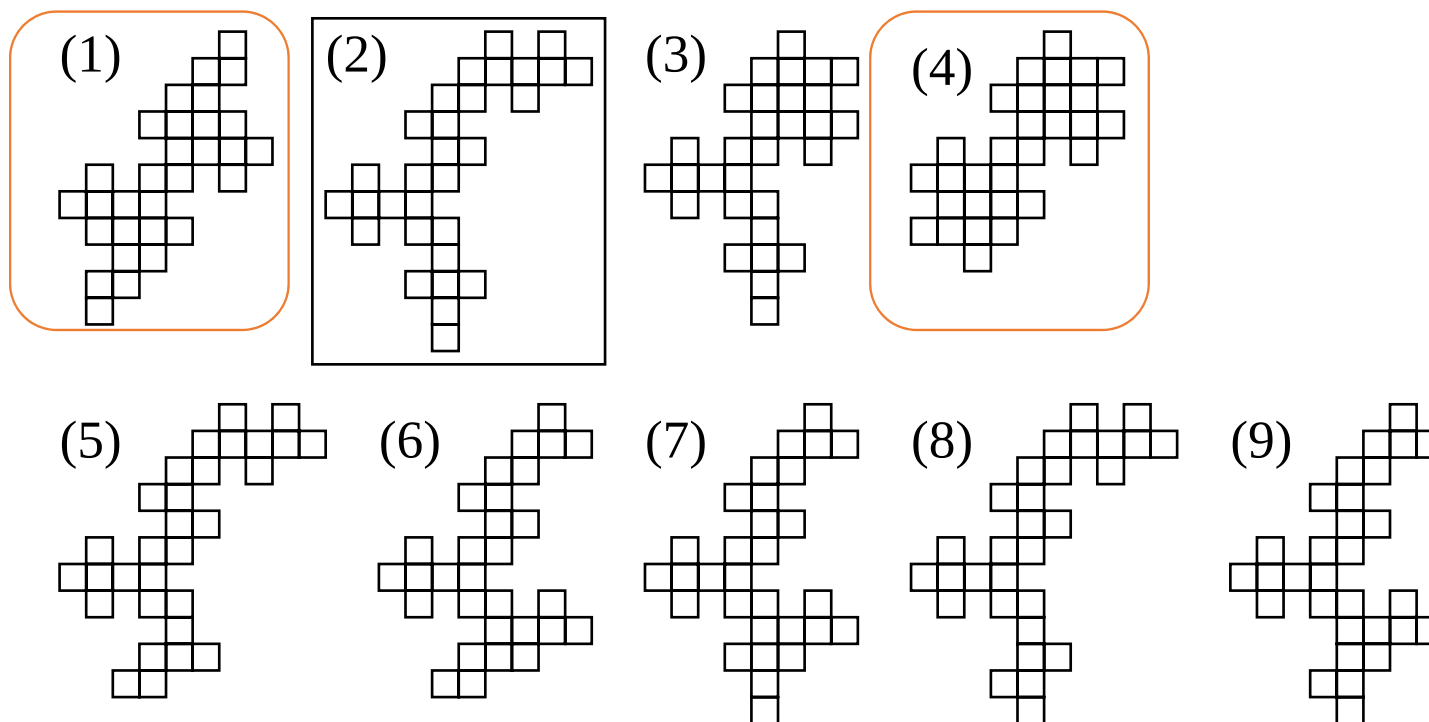
2014年, 面積30の展開図の全探索はスパコンで2ヶ月.

BDDを使うとPCで10日間.

...この調子で46まで行くのは難しいと言わざるをえないが...?

後日談

- Dawei君の博士論文の一部より
 - 回転対称な展開図に限定すれば、、、



後日談

- Dawei君の博士論文の一部より
 - 回転対称な展開図に限定すれば、、、
 1. 対称形に限定することで、探索対象を大幅に減らせる
 2. 展開図は半分サイズだけ覚えればよい
 3. 面積は2ずつ増やせる

(残念な)結論: 面積46、54ではダメでした。

- 46: $1 \times 1 \times 11$, $1 \times 2 \times 7$, $1 \times 3 \times 5$ のうち、どの2つも折れる展開図があるけれど。。。.
- 54: $1 \times 1 \times 13$, $1 \times 3 \times 6$, $3 \times 3 \times 3$ も同様。

未解決問題

- 面積46や54で、3つの箱が折れる展開図はあるのか？
- 4つ以上の箱が折れる展開図は存在するのか？
- $[k$ 個以上の箱は折れない]という有限の上界はあるのか？(例えば10000通りの箱が折れる展開図などは想像しがたいけれど...。)

おまけ情報:

- 「異なるポリオミノの数」は面積45まで既知(by 白川さん on OEIS)

未解決問題が多く、若手の活躍がめざましい分野です。

発展問題

- ここで紹介しなかった問題へのアルゴリズムを考案してみよう:
問題: 多角形 P が与えられたとき、そこから箱 Q が折れるか?

既知(?)の結果:

- 一般の多角形 P と凸多面体 Q の擬多項式時間アルゴリズムがあることはある
 - $O(n^{456.5})$ 時間アルゴリズム! (Kane, et al, 2009)
- Q が「大きさ $a \times b \times c$ の箱」で P は n 多角形で糊付けも与えられたとき
 - $O((n+m)\log n)$ 時間アルゴリズム
 - 変数 m は「一つの辺が m 個にばらけている」という未知のパラメータ(Horiyama, Mizunashi 2017)
- a, b, c が不明のときはどうか?

A. 展開図とそこから折れる凸立体の研究

1. 複数の箱が折れる共通の展開図
 - 2通りの箱が折れる共通の展開図
 - 3通りの箱が折れる共通の展開図そして...残された未解決問題たち
2. 正多面体の共通の展開図
3. 正多面体に近い立体と正4面体の共通の展開図(予備)

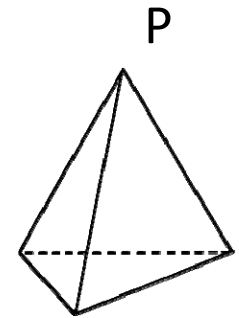
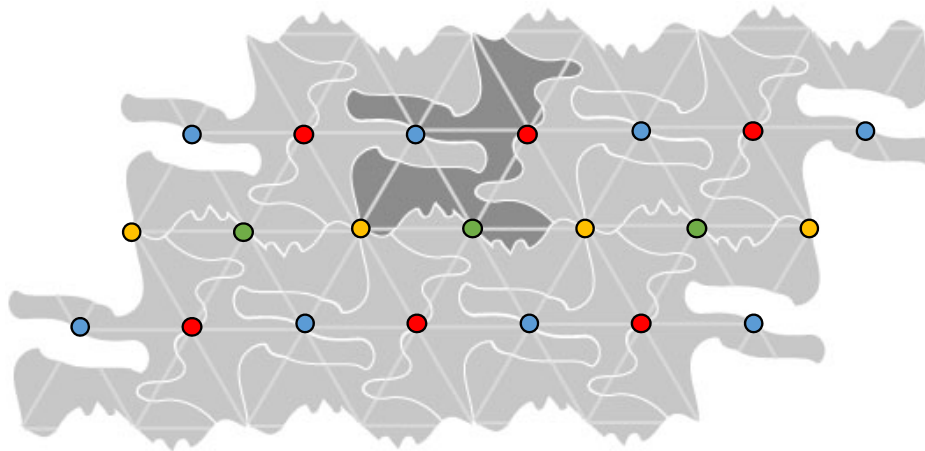
A1. 展開図の基礎知識(2)

正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

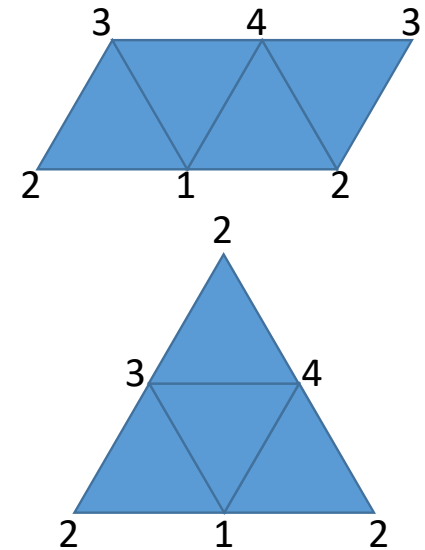
[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]

正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) P は **p2 タイリング**。つまり 180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

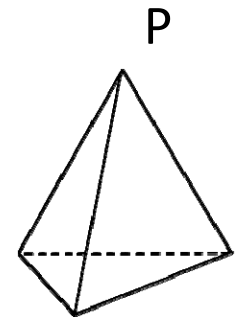


参考: 正4面体の辺展開図は二種



A1. 展開図の基礎知識(2)

正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ



[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]

正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) P は **p2 タイリング**。つまり 180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の 4 頂点**が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers,
Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America, Monthly* 114,
pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]

平面上で正4面体を4回、
上手に転がすと、元に戻る。
各面にインクをつけて転がすと
平面全体にスタンプを押せる。

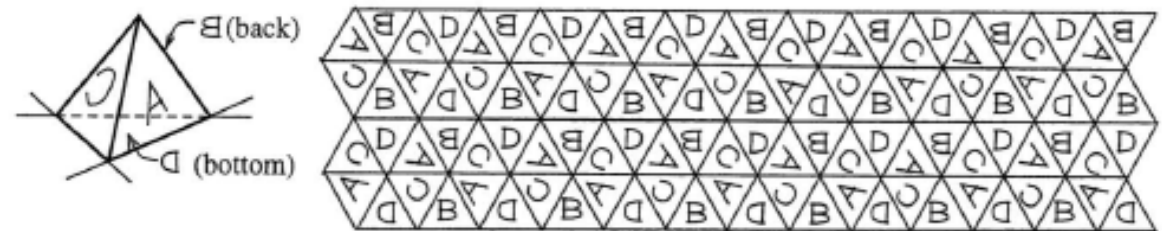
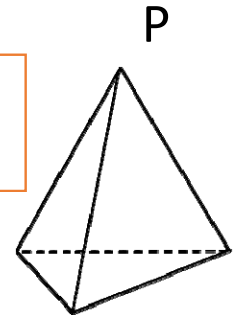


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with R.

A1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron):
4つの面が合同な4面体



4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]

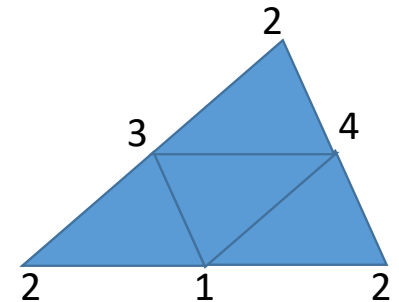
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) P は **p2 タイリング**。つまり180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の 4 頂点**が**その単面による三角格子**をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

[直感的な説明]

正三角形格子を全体にゆがませればよい。

演習:どんな鋭角3角形からも4単面体が折れることを示せ



A1. 展開図の基礎知識：演習問題

1. 立方体の辺展開図を一つ選び、どのくらい多くの凸立体が折れるか、試してみよう。何かわかることはあるか？
2. どんな鋭角3角形からでも4単面体が折れることを示せ。どんな3角形でもタイリングできるが、それとの関係はどうか？鈍角3角形ではどうなるか？どんな4角形でも(凸でなくても！)タイリングできるが、これから立体は折れるか？折れないとすればなぜか？
3. 正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？
 - 正4面体にはわりと美しい最適解があります
 - 最適解とその証明ができればなおよし
 - 正8面体と正6面体
 - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
 - 最適性を示すのは、手間がかかります
 - 正20面体と正12面体
 - 最適解を見つけるのもちょっと大変かも

正四面体が折れる ジョンソン・ザルガラー立体の 辺展開図について

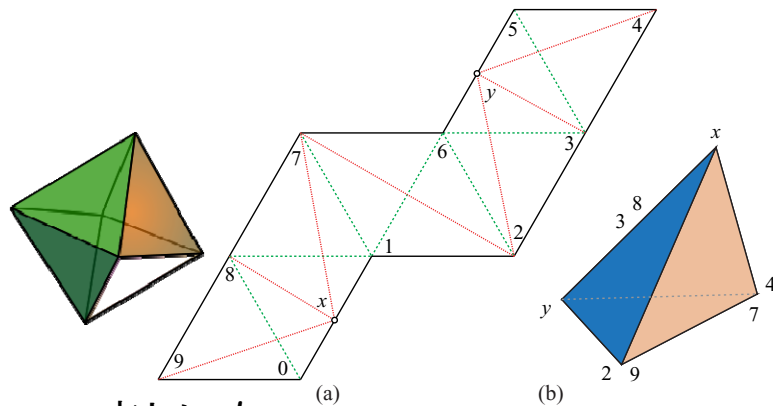
文献情報:

Yoshiaki Araki, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara: Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol.20, no.1, pp.101-114, February, 2016.

Open Problem 25.6

(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)

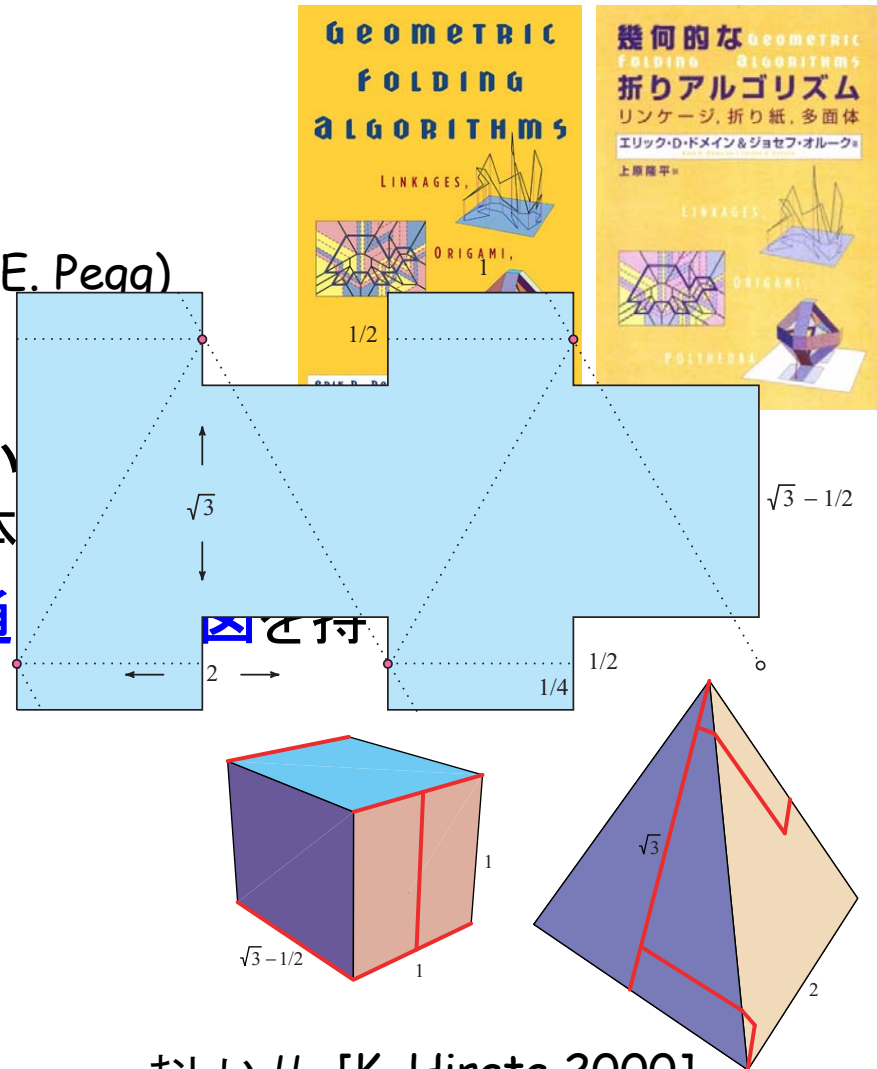
- ある正多面体を切り開いてそこから異なる正多面体 (2つの正多面体が共通)



おいしい！

Regular Octahedron

Tetramonohedron (面が合同)



おいしい!! [K. Hirata 2000]
Regular Tetrahedron
Box $1 \times 1 \times 1.232$

共通の展開図

小学生レベルの
「当たり前」？

立方体の辺展開: 11種類

正8面体の辺展開: 11種類

- Theorem [Horiyama, Uehara 2010]
以下を同時に満たす多角形 P は、存在しない

(1) P は、**正四面体**の一般展開

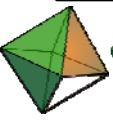
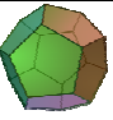
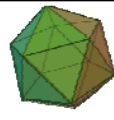
(2) P は、**立方体**,
正八面体,
正十二面体,
or **正二十面体**の辺展開

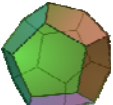
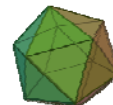
正12面体の辺展開:
43380種類

正20面体の辺展開:
43380種類

本当に展開図になっていることも
[Hiroyama, Shoji 2011]が初出！

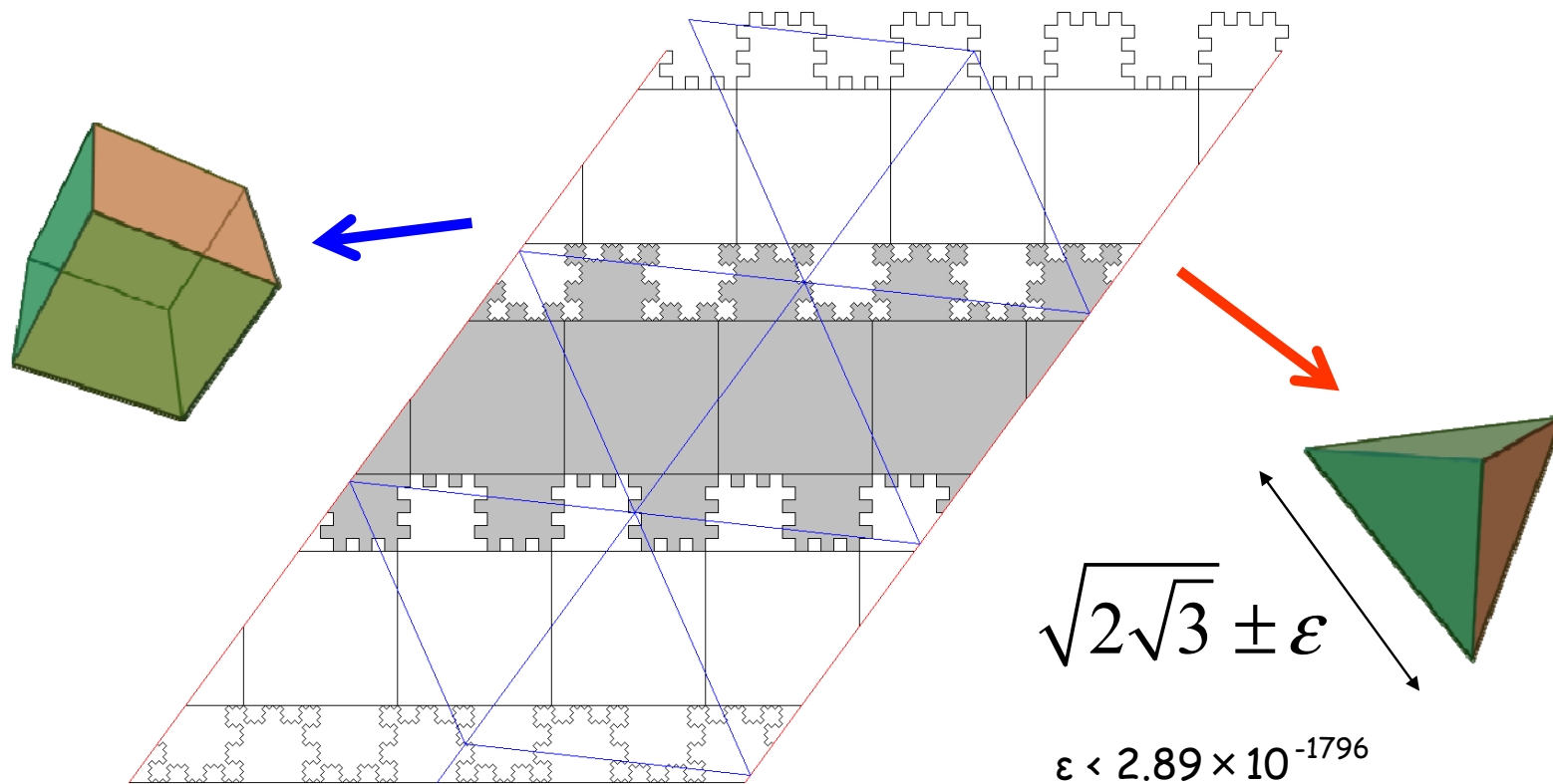
- Open

•  一般展開 v.s.     一般展開

•     の一般展開 同士

共通の展開図

- 正四面体 v.s. 立方体 [Shirakawa, Horiyama, Uehara 2011]



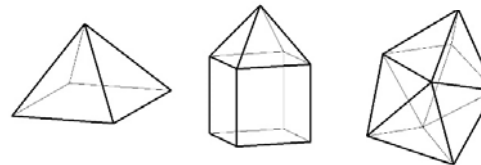
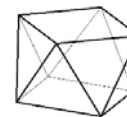
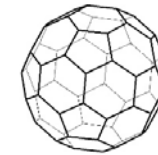
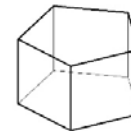
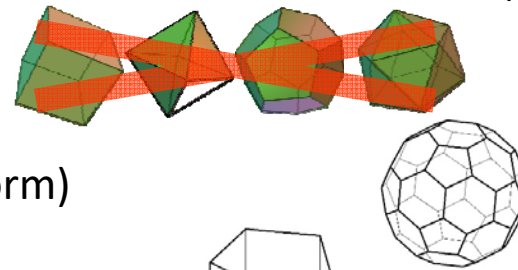
Our Results

- ・ 各面が正多角形
- ・ 凸多面体

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

[Horiyama, Uehara 2010]

- 正多面体 (面が 1 種類、uniform)
- 半正多面体 (面が2種類以上、uniform)
- 正 n 角柱 (上下が正 n 角形、側面が正方形)
- 正 n 反角柱 (上下が正 n 角形、側面が正三角形)
- ジョンソン・ザルガラー多面体



10秒で答えてほしい謎々

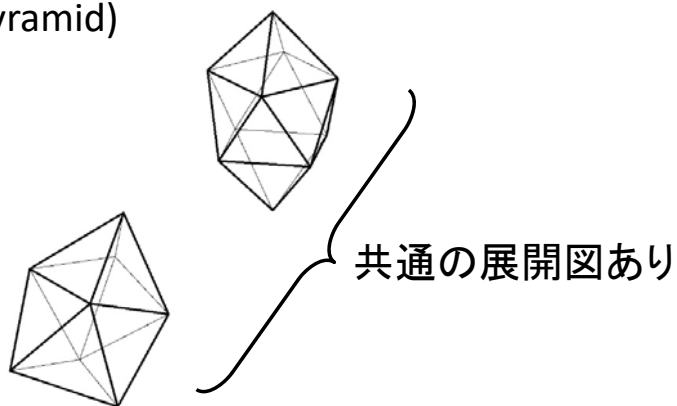
正3反角柱は普通
なんと呼ぶか？

Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類
 - J17 (Gyroelongated square dipyramid)

実は少し...
詐欺ジョンソン立体

- J84 (Snub disphenoid)



- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類: 共通の展開図なし

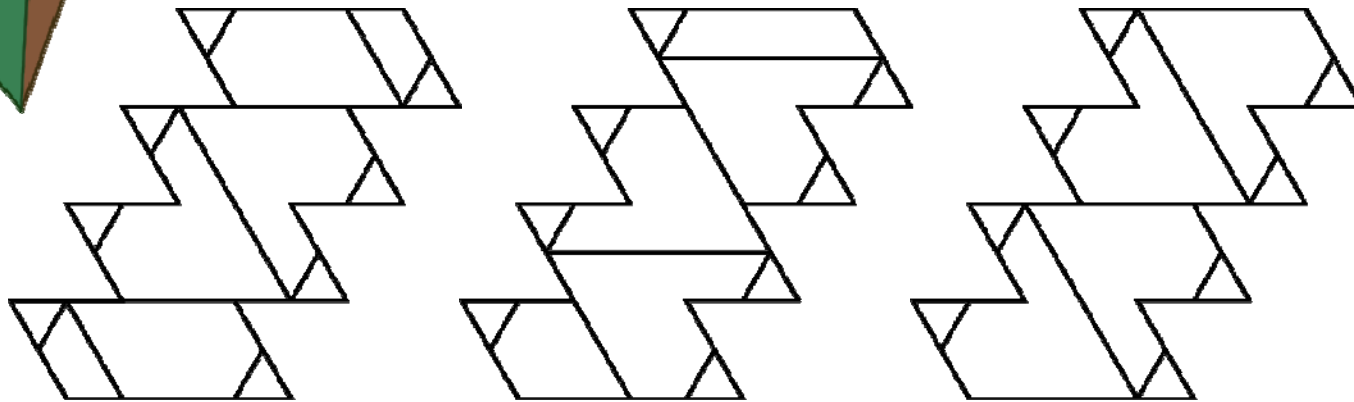
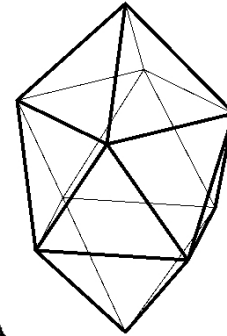
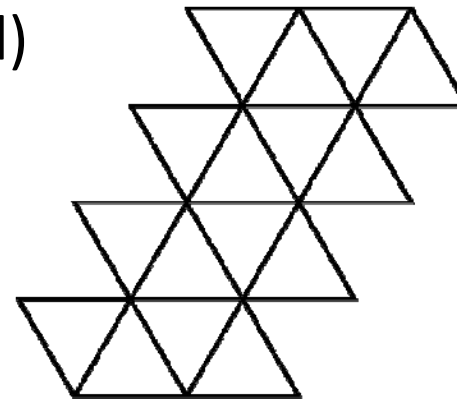
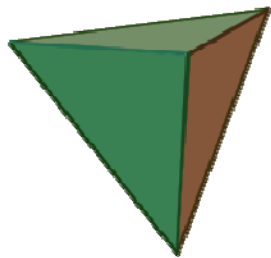
Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類
 - J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個
 - 78個 : 1通りの折り方
 - 8個 : 2通りの折り方
 - 1個 : 3通りの折り方
 - J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個
 - 32個 : 1通りの折り方
 - 5個 : 2通りの折り方
- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし



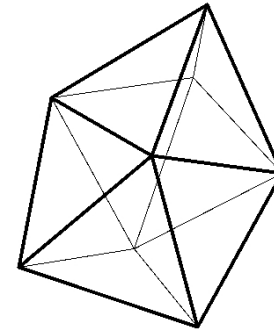
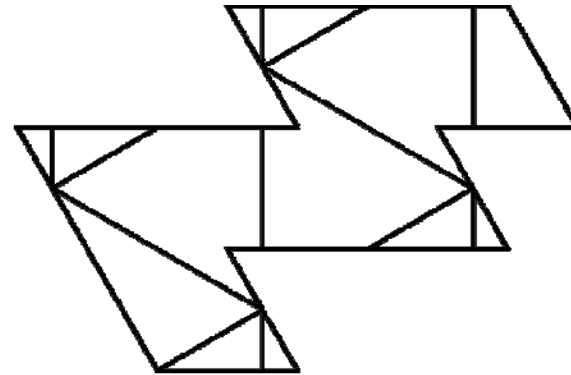
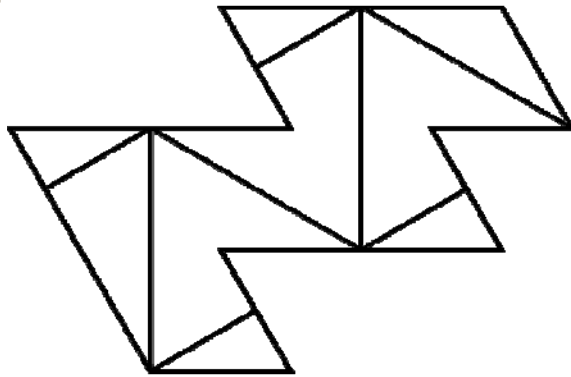
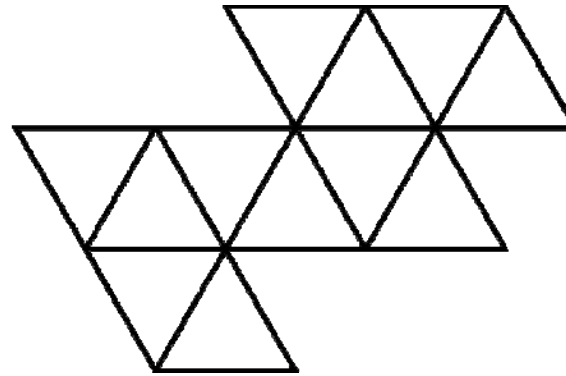
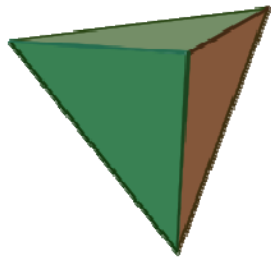
Our Results

- J17 (Gyroelongated square dipyramid)



Our Results

- J84 (Snub disphenoid)



ざっくりした分類

- 整面凸多面体の辺展開図群

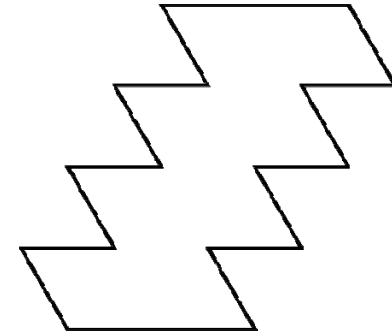
1. タイリングが存在しないなら, 4単面体は折れない.
 - [Akiyama 他 2011]による分類結果があった
2. 面積や長さの「つじつま」があっていなければ正4面体は折れない.
3. どちらもパスした立体の辺展開は, 試してみなければわからない!



以下, 3と2を紹介します.

創造力が試される折り紙 (?)

Q: 多角形 P を折って、凸多面体を作りなさい



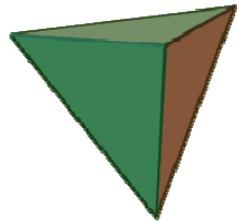
- 凸多面体が折れるような辺々接着は、動的計画法で求められる [Lubiw, O'Rourke 1996]
- でも、どこを折るか、折り目を求めるアルゴリズムは Unknown
- 頂点は、外周上の $1/2$ 単位のところにくる (証明略)

[Akiyama 2007]
[Akiyama, Nara, 2007]

Key: Tiling Theorem

• Theorem : P は **四面体の一般展開** iff

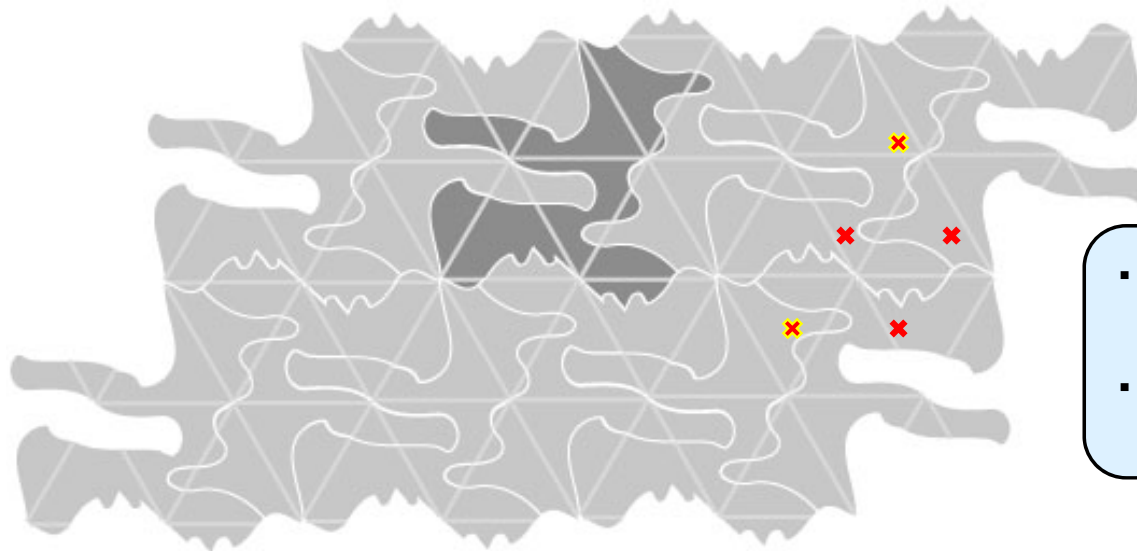
(1) P が **p2 tiling** 可能 (180° 回転のタイリング)



(2) **回転中心 4つ** が三角格子を形成

(3) **回転中心 4つ** が格子点

(4) **回転中心 4つ** が別々の同値類に属す



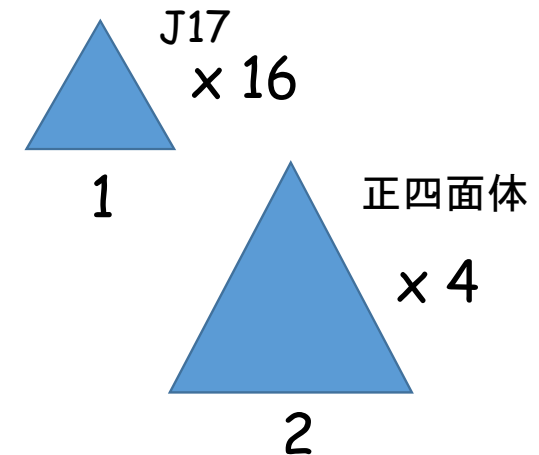
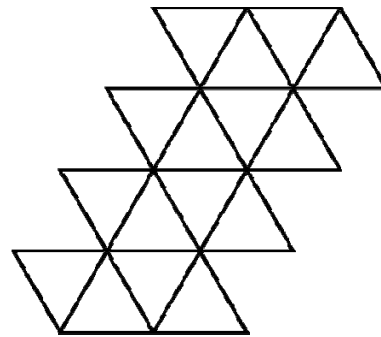
- 正三角格子
→ 正四面体
- 一般の三角格子
→ tetramonohedron

J17, J84 の展開図

- 展開図の列挙アルゴリズム [Horiyama, Shoji 2011]

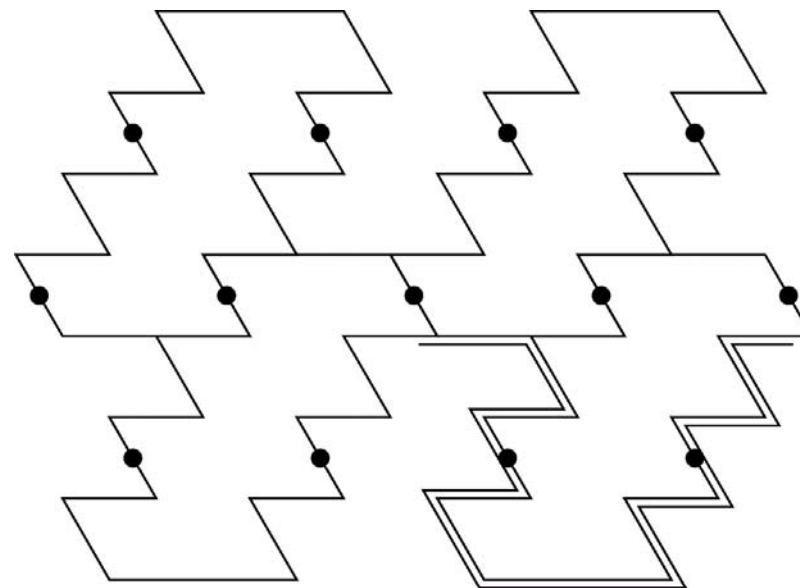
- 展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

- J17 13,041個
- J84 1,109個



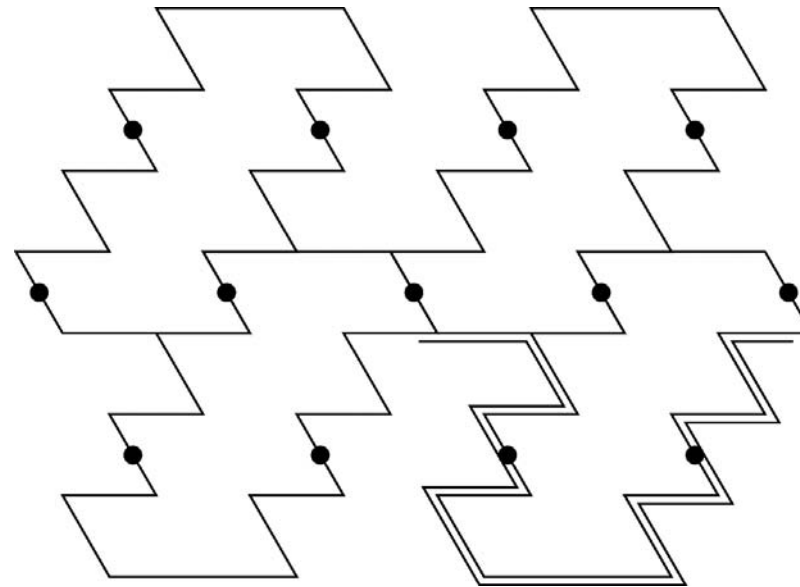
- 各頂点の内角を、巡回リストで持つ
 - 辺々接着を考えて、各辺の中点も頂点として追加
 - 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess / Check $r_1 r_2 = 2$

J17, J84 の展開図



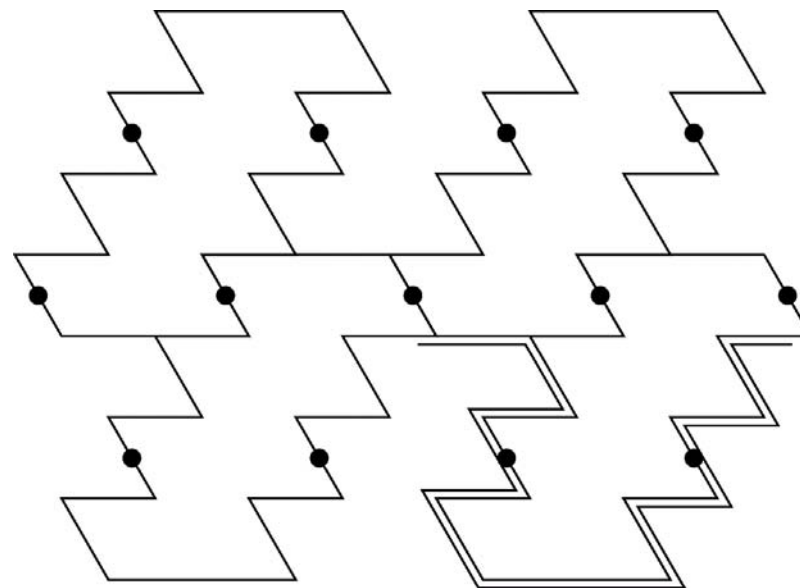
- 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

J17, J84 の展開図



- 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

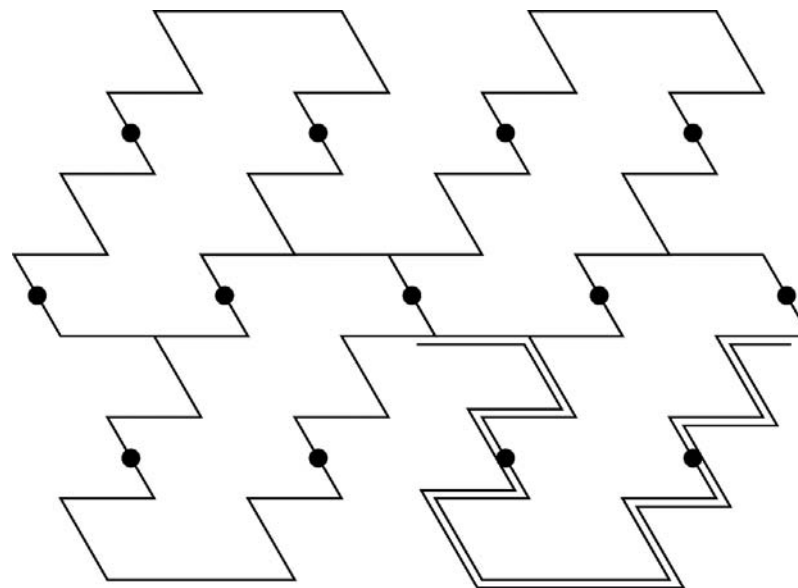
J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達

- 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達
- r_1, r_2, r_3, r_4 が正三角格子に載っているか確認
 - 180, 180, 240, 180, 300,
 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 以外

• JZ多面体の展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

- J01 8
- J02 16
- J03 308
- J04 3,030
- J05 29,767
- J06 7,825,005

• ...

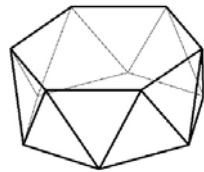
- J71 2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
- J72 20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
- J73 10,597,511,106,353,370,064,654,696,448

• ...

207穰 9942杼 3173垓 9411京
986兆 8961億 8195万 6672

J17, J84 以外

- 展開図がタイリングになる整面凸多面体 [Akiyamara ら 2011]
 - JZ多面体 : J1, J8, J10, J12, J13, J14,
(18種類) J15, J16, J17, J49, J50, J51,
J84, J86, J87, J88, J89, J90
 - 正6反角柱 (上下が正六角形、側面に正三角形12枚)



細かい補足:[Akiyama ら]はタイリングを考えたが、今の枠組みでは p2 タイリングを考える必要がある。

- 「展開図の長さや面積」と正4面体のその「つじつま」がある必要がある。

J17, J84 以外

- タイリングをもつ各 J_x について,
 1. 面積 S_x を求める
 2. その面積を持つ正4面体の辺の長さ L_x を求める
 3. J_x を構成する正多角形(ここでは正3角形と正方形のみでよい)を敷き詰めた「部分展開図」を考える
 4. 部分展開図上の「格子点」+「1/2点」上の2点が L_x になりうるかどうかをチェックする

Name	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Image						
# of $\square$ s	4	5	0	2	1	0
# of $\triangle$ s	8	10	16	6	10	14
L_{J_i}	$\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2}$ = 2.075...	$\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 2.320...	2	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}}$ = 1.629...	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 1.754...	$\sqrt{3.5}$ = 1.870...

J17, J84 以外

・タイリングを

3. L_x を構成
でよい

4. 部分展開
りうるか

図10のベクトルの和が L_x になることが必要.

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の単純な線形和になるので, 例え
ば $\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 5}$ などには作れない. よってそうした立
体の展開図にはなりえない.

「1点」+「1/2点」上の2点が L_x にな
りうるかチェックする

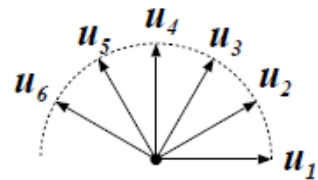


Figure 10: Six unit vectors.

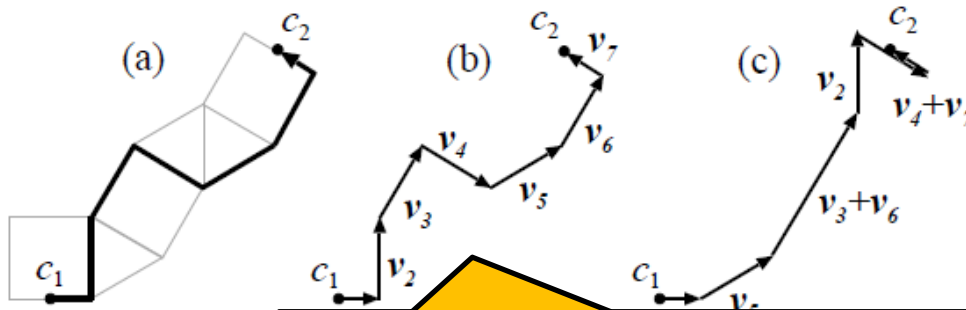


Figure 11: Linkage
linkage, (b) correspo

この時点で生き残った候補:
J12, J13, J14, J51, J89

J12, J13, J14, J51, J89

- タイリングの枚数に上限(10枚; 証明略)があるので, 長さ10の可能な組合せを全部試して, 上記のどの辺の長さも作れないことを示せばよい.

1. 国際会議発表時: 下図(a)のパターンを全探索.

10時間程度で計算終了. どの長さも現れなかった.

2. 論文: ベクトルを(c)のように正規化すればよい!

1秒未満!!

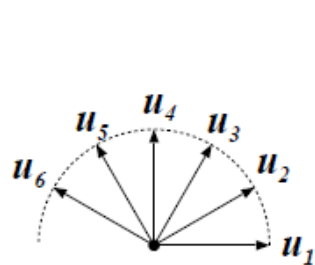


Figure 10: Six unit vectors.

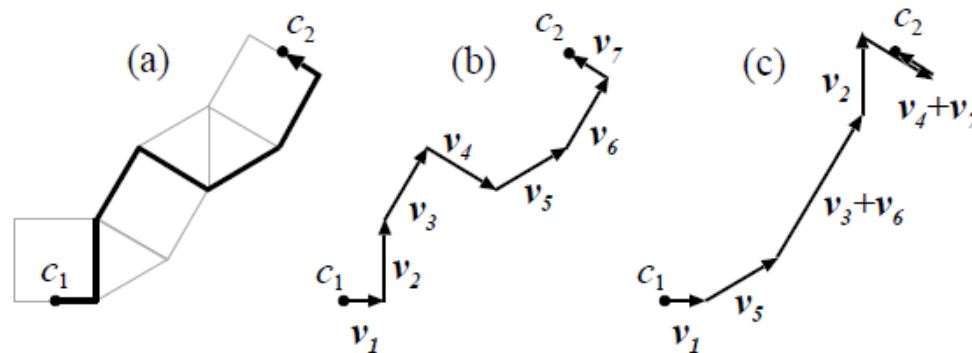


Figure 11: Linkage as the set of unit vectors: (a) given tiling and linkage, (b) corresponding vectors, and (c) reorganized vectors.

Our Results

- 正四面体 (一般展開)

v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- ・ 各面が正多角形
- ・ 凸多面体

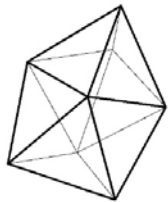
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類

- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個



- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方

- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個



- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし