

A. 展開図とそこから折れる凸立体の研究

1. 複数の箱が折れる共通の展開図
 - 2通りの箱が折れる共通の展開図
 - 3通りの箱が折れる共通の展開図そして...残された未解決問題たち
2. 正多面体の共通の展開図
3. 正多面体に近い立体と正4面体の共通の展開図(予備)

正四面体が折れる ジョンソン・ザルガラー立体の 辺展開図について

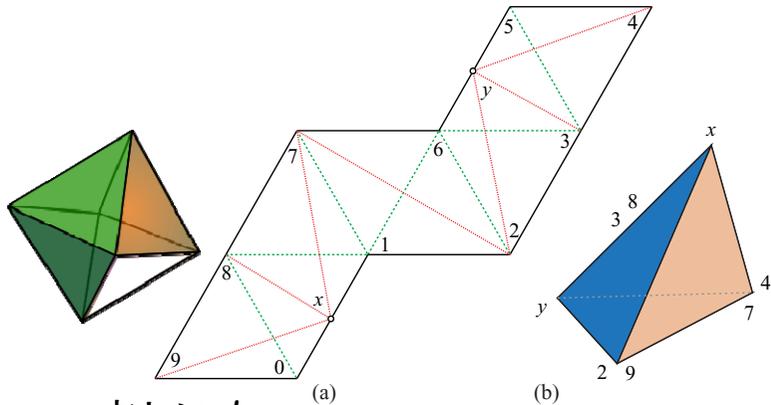
文献情報:

Yoshiaki Araki, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara: Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid, Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol.20, no.1, pp.101-114, February, 2016.

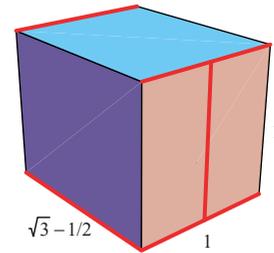
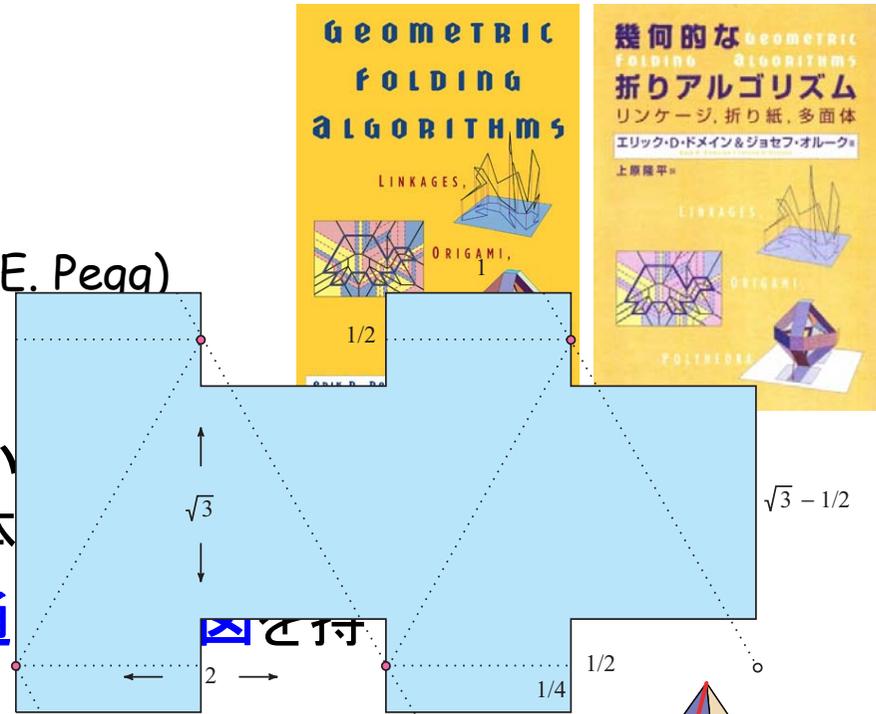
Open Problem 25.6

(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Peqa)

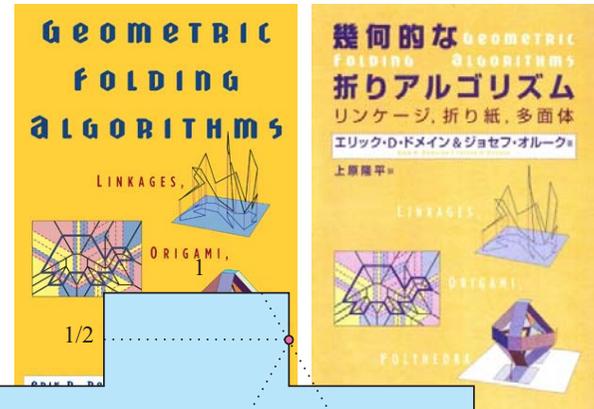
- ある正多面体を切り開いてそこから異なる正多面体 (2つの正多面体が**共通**)



おいしい!
Regular Octahedron
Tetramonohedron (面が合同)



おいしい!! [K. Hirata 2000]
Regular Tetrahedron
Box $1 \times 1 \times 1.232$



共通の展開図

小学生レベルの「当たり前」?

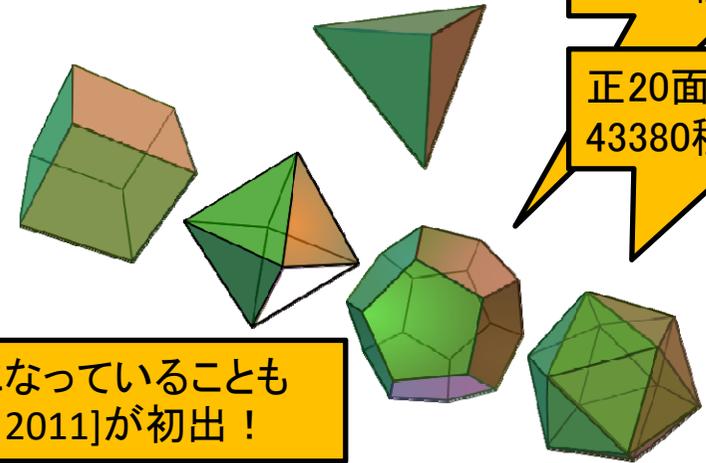
立方体の辺展開: 11種類

正8面体の辺展開: 11種類

- Theorem [Horiyama, Uehara 2010]
以下を同時に満たす多角形 P は、存在しない
- (1) P は、**正四面体**の一般展開
- (2) P は、**立方体**,
正八面体,
正十二面体,
or **正二十面体**の辺展開

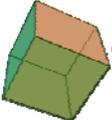
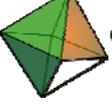
正12面体の辺展開: 43380種類

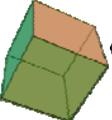
正20面体の辺展開: 43380種類



本当に展開図になっていることも [Hiroyama, Shoji 2011]が初出!

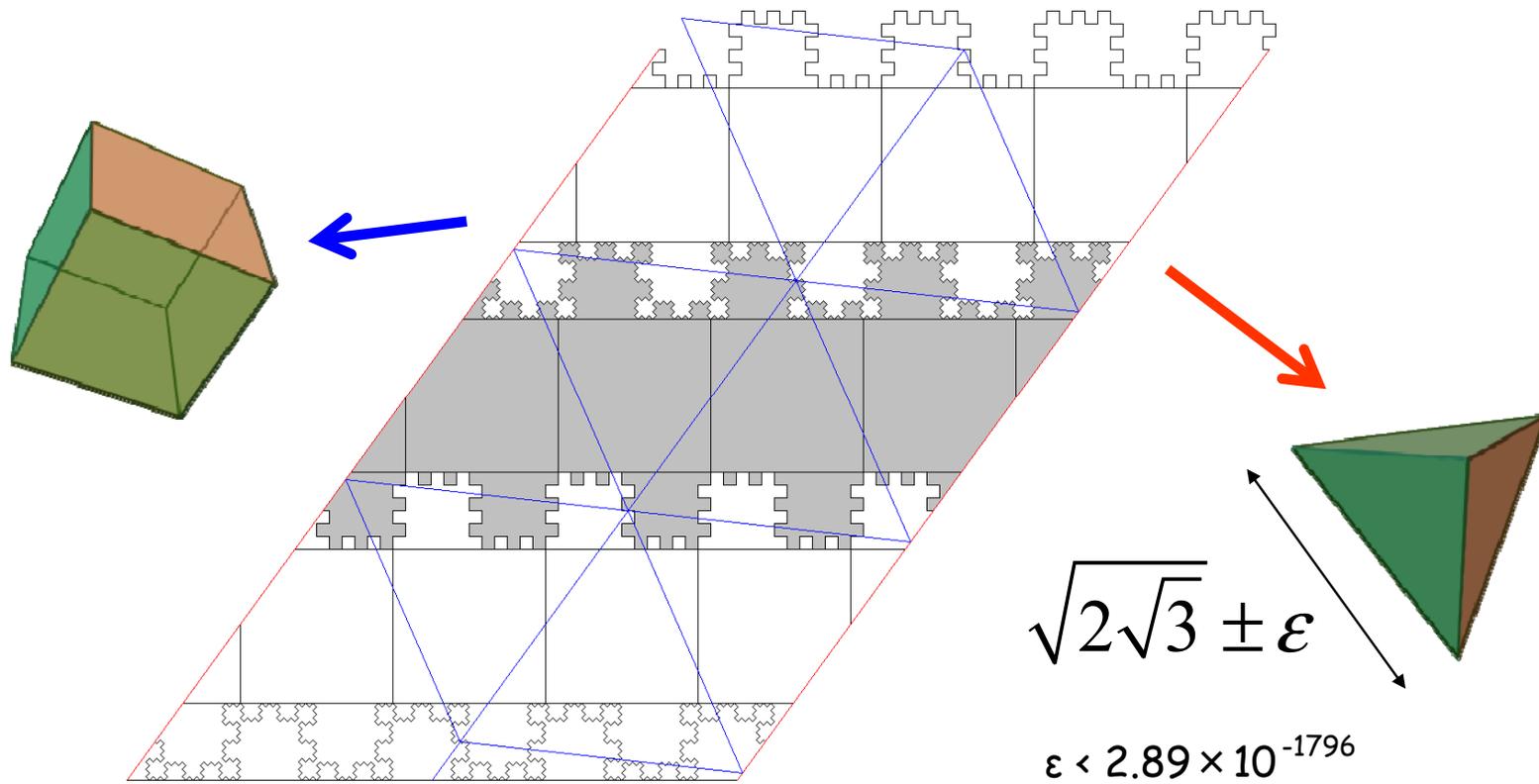
• Open

•  一般展開 v.s.     一般展開

•     の一般展開 同士

共通の展開図

- 正四面体 v.s. 立方体 [Shirakawa, Horiyama, Uehara 2011]



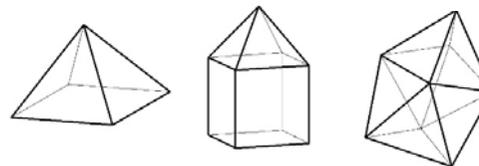
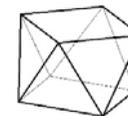
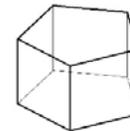
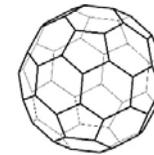
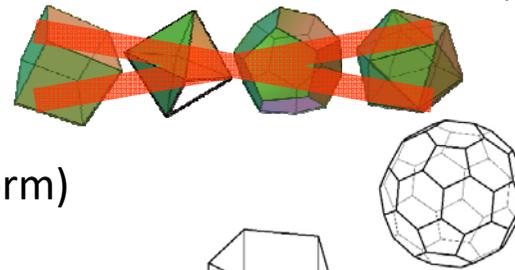
Our Results

- ・ 各面が正多角形
- ・ 凸多面体

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

[Horiyama, Uehara 2010]

- 正多面体 (面が 1 種類、uniform)
- 半正多面体 (面が 2 種類以上、uniform)
- 正 n 角柱 (上下が正 n 角形、側面が正方形)
- 正 n 反角柱 (上下が正 n 角形、側面が正三角形)
- ジョンソン・ザルガラー多面体



10秒で答えてほしい謎々

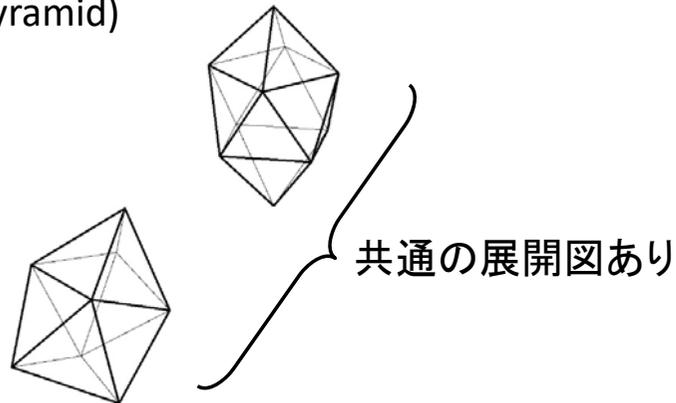
正3反角柱は普通
なんと呼ぶか？

Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類
 - J17 (Gyroelongated square dipyramid)

実は少し...
詐欺ジョンソン立体

- J84 (Snub disphenoid)



- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類: 共通の展開図なし

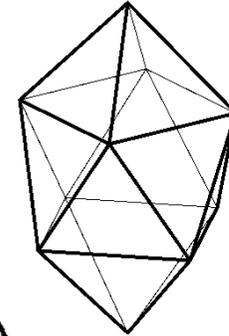
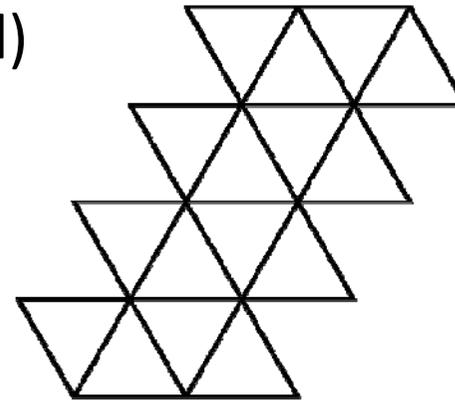
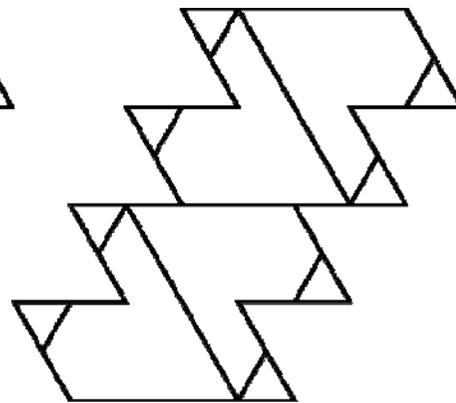
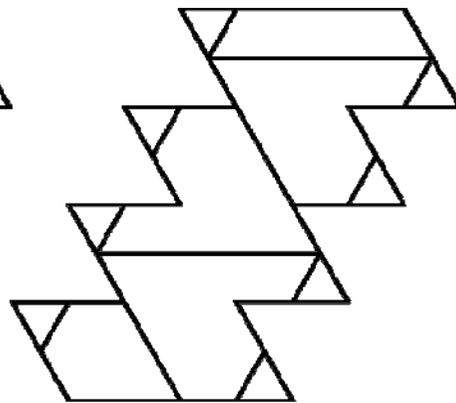
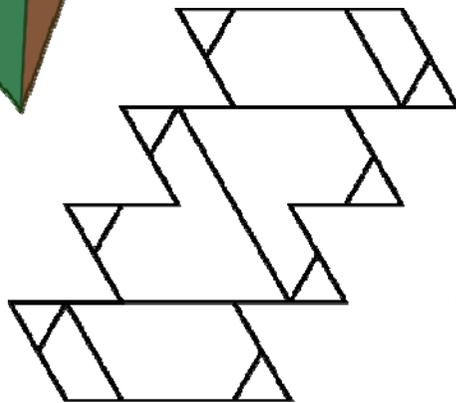
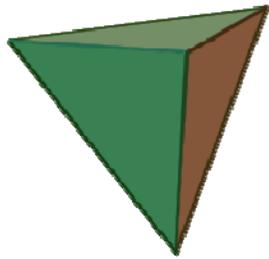
Our Results

- 正四面体 (一般展開)
v.s. 整面凸多面体 (辺展開)
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類
 - J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個
 - 78個 : 1通りの折り方
 - 8個 : 2通りの折り方
 - 1個 : 3通りの折り方
 - J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個
 - 32個 : 1通りの折り方
 - 5個 : 2通りの折り方
- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし



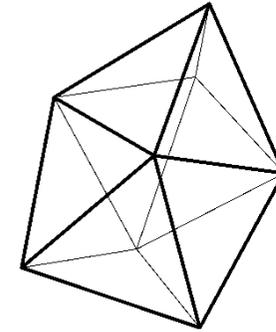
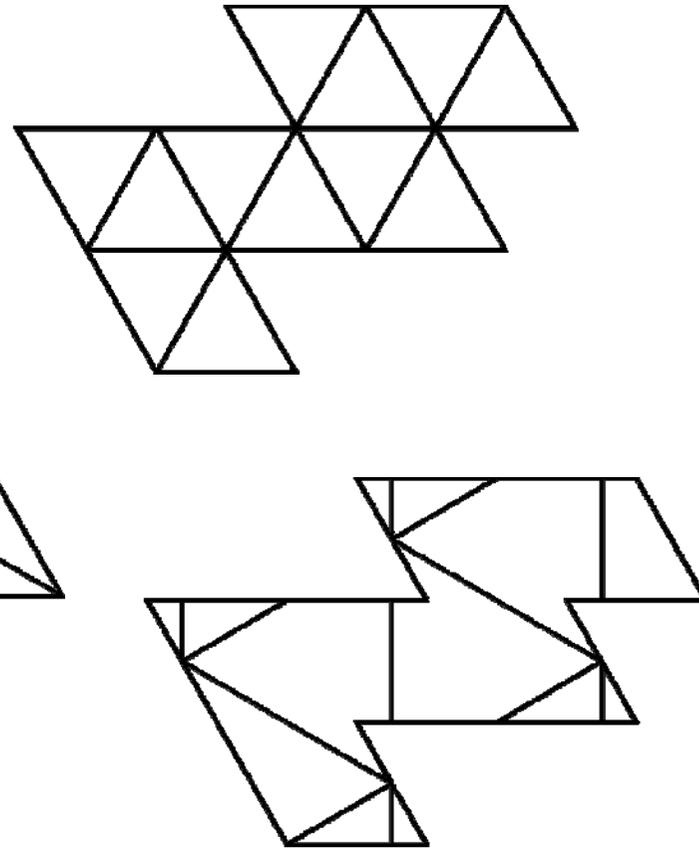
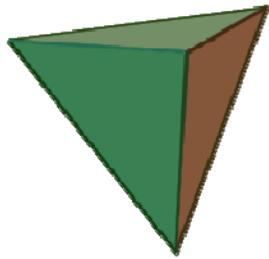
Our Results

- J17 (Gyroelongated square dipyramid)



Our Results

- J84 (Snub disphenoid)



ざっくりした分類

- 整面凸多面体の辺展開図群

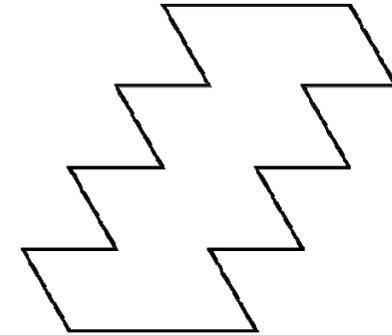
1. タイリングが存在しないなら, 4単面体は折れない.
 - [Akiyama 他 2011]による分類結果があった
2. 面積や長さの「つじつま」があっていなければ正4面体は折れない.
3. どちらもパスした立体の辺展開は, 試してみなければわからない!



以下, 3と2を紹介します.

創造力が試される折り紙 (?)

Q: 多角形 P を折って、凸多面体を作りなさい



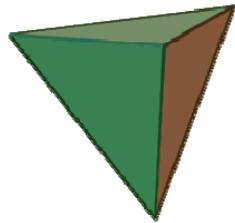
- 凸多面体が折れるような辺々接着は、動的計画法で求められる[Lubiw, O'Rourke 1996]
- でも、どこを折るか、折り目を求めるアルゴリズムは Unknown
- 頂点は、外周上の1/2単位のところにくる(証明略)

[Akiyama 2007]
[Akiyama, Nara, 2007]

Key: Tiling Theorem

• Theorem : P は **四面体の一般展開** iff

(1) P が **p2 tiling** 可能 (180° 回転のタイリング)



(2) **回転中心 4つ** が三角格子を形成

(3) **回転中心 4つ** が格子点

(4) **回転中心 4つ** が別々の同値類に属す



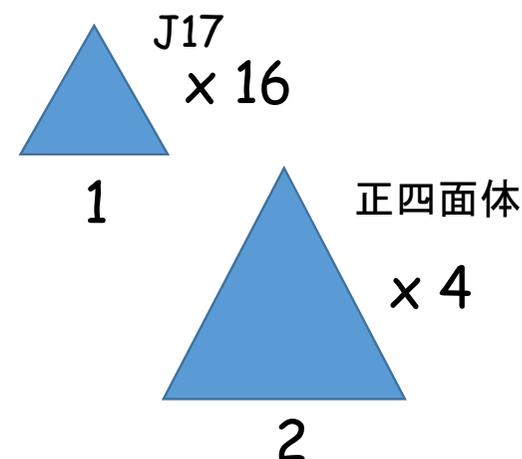
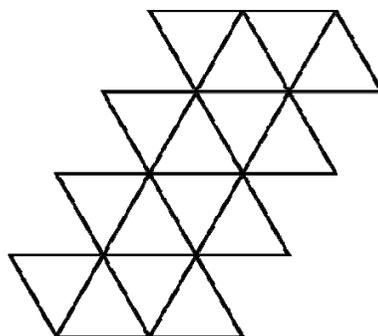
- 正三角格子
→ 正四面体
- 一般の三角格子
→ tetramonohedron

J17, J84 の展開図

- 展開図の列挙アルゴリズム [Horiyama, Shoji 2011]

- 展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

- J17 13,041個
- J84 1,109個



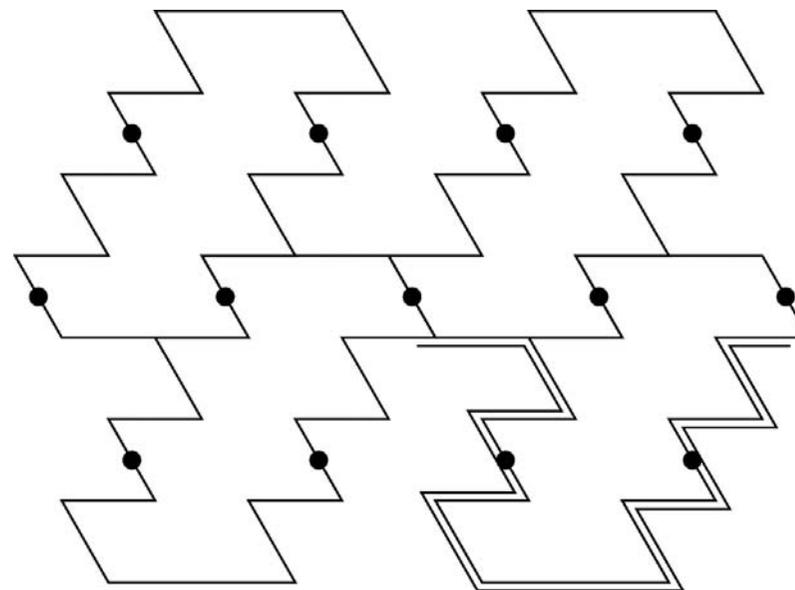
- 各頂点の内角を、巡回リストで持つ

- 辺々接着を考えて、各辺の中点も頂点として追加

- 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

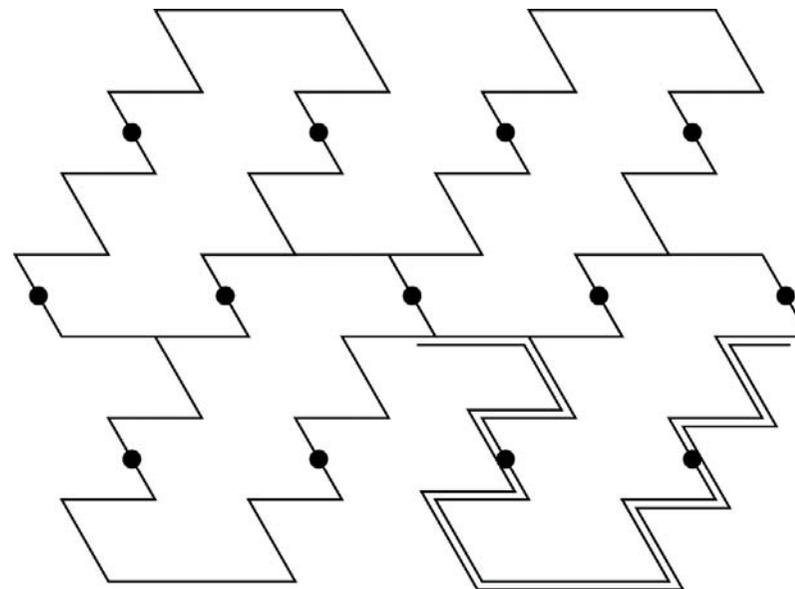
- 回転中心 r_1, r_2 を guess / Check $r_1 r_2 = 2$

J17, J84 の展開図



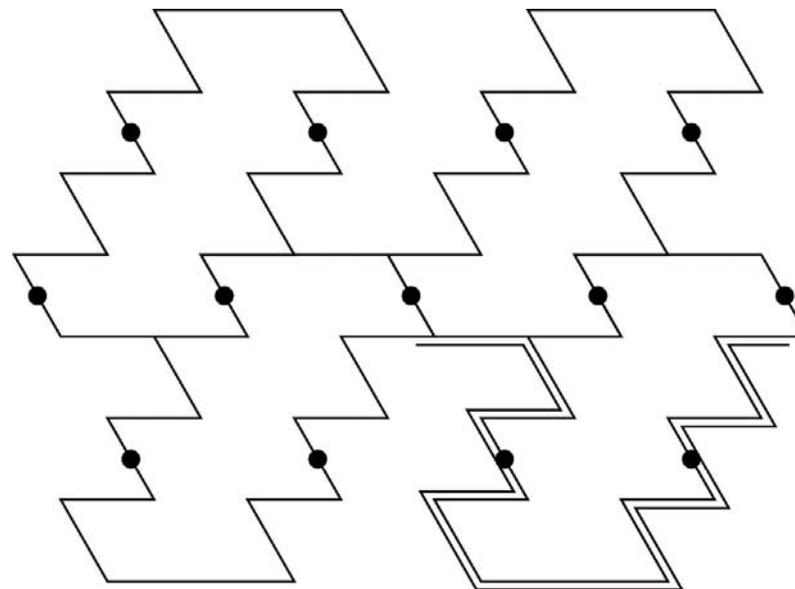
- 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

J17, J84 の展開図



- 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180
- 回転中心 r_1, r_2 を guess $\rightarrow r_1, r_2$ で 180° 回転

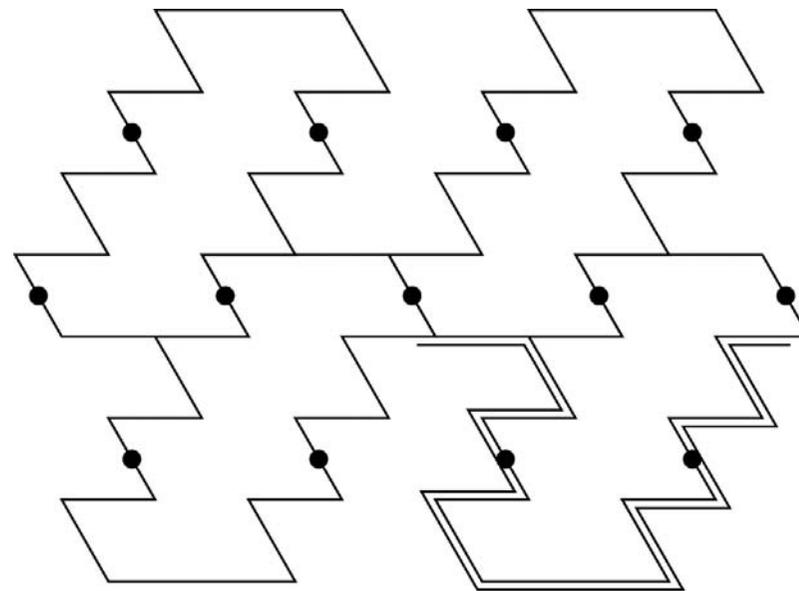
J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達

- 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 の展開図



- 回転中心 r_3 を guess $\rightarrow r_3$ で 180° 回転, r_4 に到達
- r_1, r_2, r_3, r_4 が正三角格子に載っているか確認
 - 180, 180, 240, 180, 300,
180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 120, 180, 180, 180, 60, 180,
300, 180, 60, 180, 300, 180, 60, 180, 300, 180

J17, J84 以外

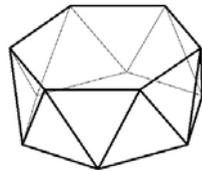
• JZ多面体の展開図の個数 [Horiyama, Shoji 2013]

- J01 8
- J02 16
- J03 308
- J04 3,030
- J05 29,767
- J06 7,825,005
- ...
- J71 2,079,942,317,394,110,986,896,181,956,672
- J72 20,668,673,558,050,742,614,946,330,896
- J73 10,597,511,106,353,370,064,654,696,448
- ...

207穰 9942秭 3173垓 9411京
986兆 8961億 8195万 6672

J17, J84 以外

- 展開図がタイリングになる整面凸多面体 [Akiyamaら 2011]
 - J2多面体： J1, J8, J10, J12, J13, J14,
(18種類) J15, J16, J17, J49, J50, J51,
J84, J86, J87, J88, J89, J90
 - 正6反角柱 (上下が正六角形、側面に正三角形12枚)



細かい補足：[Akiyamaら]はタイリングを考えたが、今の枠組みでは p2 タイリングを考える必要がある。

- 「展開図の長さや面積」と正4面体のその「つじつま」がある必要がある。

J17, J84 以外

- タイリングをもつ各 J_x について,
 1. 面積 S_x を求める
 2. その面積を持つ正4面体の辺の長さ L_x を求める
 3. J_x を構成する正多角形(ここでは正3角形と正方形のみでよい)を敷き詰めた「部分展開図」を考える
 4. 部分展開図上の「格子点」+「1/2点」上の2点が L_x になりうるかどうかをチェックする

Name	J15	J16	J17	J49	J50	J51
Image						
# of □s	4	5	0	2	1	0
# of △s	8	10	16	6	10	14
L_{J_i}	$\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2}$ = 2.075...	$\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 2.320...	2	$\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}}$ = 1.629...	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{2}}$ = 1.754...	$\sqrt{3.5}$ = 1.870...

図10のベクトルの和が L_x になることが必要.

J17, J84 以外

・タイリングを

3. L_x を構成
でよい

4. 部分展開「1/2点」+「1/2点」上の2点が L_x になりうるかチェックする

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の単純な線形和になるので, 例えば $\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3} + 5}$ などは作れない. よってそうした立体の展開図にはなりえない.

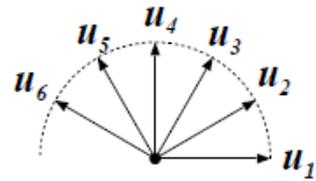


Figure 10: Six unit vectors.

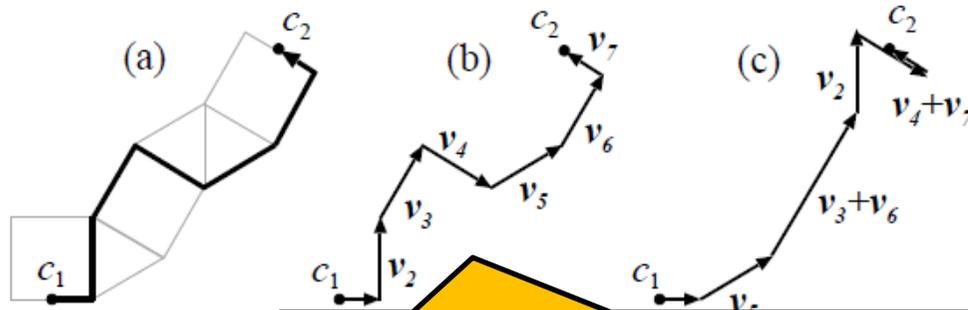


Figure 11: Linkage linkage, (b) correspond

この時点で生き残った候補:
J12, J13, J14, J51, J89

J12, J13, J14, J51, J89

- タイリングの枚数に上限(10枚; 証明略)があるので, 長さ10の可能な組合せを全部試して, 上記のどの辺の長さも作れないことを示せばよい.

1. 国際会議発表時: 下図(a)のパターンを全探索.

10時間程度で計算終了. どの長さも現れなかった.

2. 論文: ベクトルを(c)のように正規化すればよい!

1秒未満!!

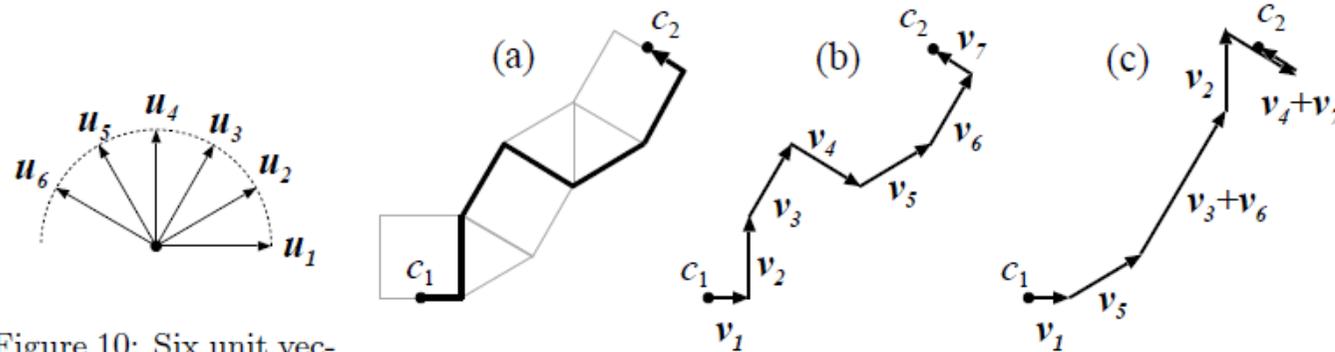


Figure 10: Six unit vectors.

Figure 11: Linkage as the set of unit vectors: (a) given tiling and linkage, (b) corresponding vectors, and (c) reorganized vectors.

Our Results

- 正四面体 (一般展開)

v.s. 整面凸多面体 (辺展開)

- 各面が正多角形
- 凸多面体

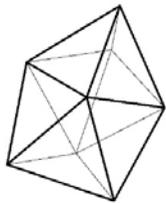
- ジョンソン・ザルガラー多面体: 全 92種類

- J17 (Gyroelongated square dipyramid) 辺展開 13,014個



- 78個 : 1通りの折り方
- 8個 : 2通りの折り方
- 1個 : 3通りの折り方

- J84 (Snub disphenoid) 辺展開 1,109個



- 32個 : 1通りの折り方
- 5個 : 2通りの折り方

- 半正多面体、正 n 角柱、正 n 反角柱、
その他JZ多面体 90種類 : 共通の展開図なし