

# 本講義のトピック

## そのC: 最新の成果たち

8. Rep-cube=Rep-tile + 展開図
9. ペタル型の紙で折るピラミッド型
10. ジッパー辺展開可能性

# 単純な多面体の ジッパー辺展開可能性について

Erik D. Demaine (MIT)

Martin L. Demaine (MIT)

上原隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

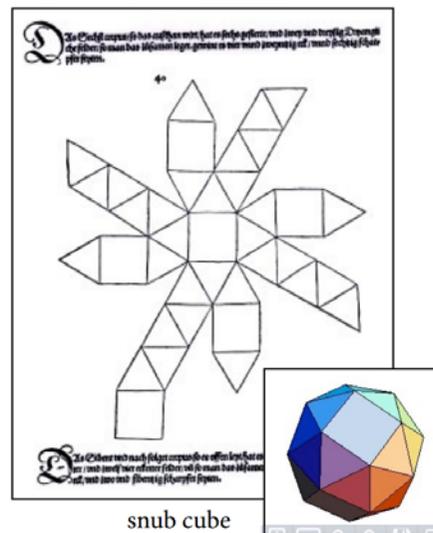
# デューラー(1525)以来...

計算折り紙界最大の未解決問題:

どんな凸多面体も、**辺だけ**に沿って切って広げれば平坦な(**重なりのない**)多角形に展開できる?



Durer, 1498



snub cube



# デューラー(1525)以来...

計算折り紙界最大の未解決問題:

この問題の難しさには**二つの側面**がある:

1. 「**辺を切る**」: (切る辺に導出される)グラフの全域木の構造に関する  
組合せ論的難しさ

(注: 辺展開は必ず全域木になる)

- 面の中を切ってよければ, 重ならない展開図はいつでも作れる.

2. 「**重ならない**」多角形の幾何的な難しさ

- 重なりを気にしなければ, どんな全域木で切っても, 平坦に展開はできる.

# デューラー(1525)以来...

計算折り紙界最大の未解決問題:

「**辺のカット**」に制限を与えて, 「**重ならない**」展開を考える

「**辺のカット**」は木でなく(**ハミルトン**)パスでなければならない  
(=ハミルトン展開)

**ハミルトン展開**の先行研究と応用:

[Shephard 1975][Demaine<sup>2</sup>, Lubiw, Shallit<sup>2</sup> 2010]



# デューラー(1525)以来...

計算折り紙界最大の未解決問題:

「**辺のカット**」に制限を与えて, 「**重ならない**」展開を考える

「**辺のカット**」は木でなく(**ハミルトン**)**パス**でなければならない  
(=ハミルトン展開)

**ハミルトン展開**の先行研究と応用:

[Shephard 1975][Demaine<sup>2</sup>, Lubiw, Shallit<sup>2</sup> 2010]



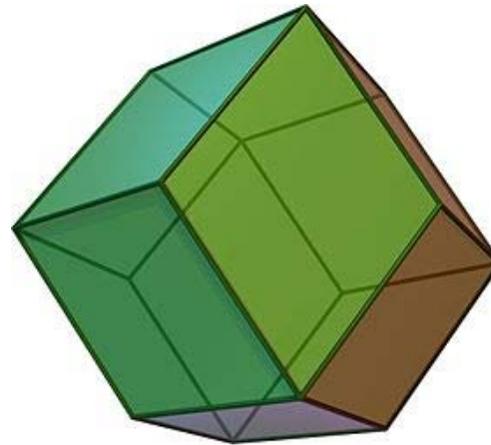
# ハミルトン展開

既知の結果 [DDLSS 2010]:

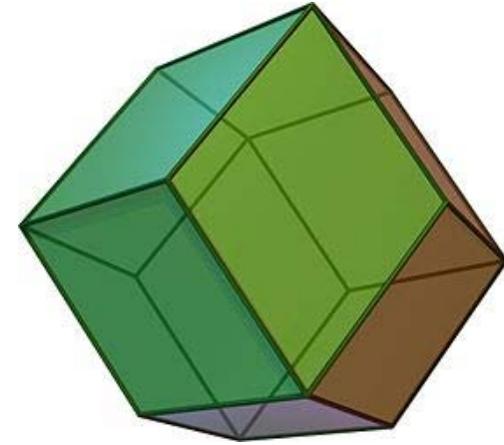
ほとんどの凸正多面体はハミルトン展開可能.

しかし例えば菱型12面体はハミルトン展開可能ではない.

なぜなら, これは  
ハミルトン路を  
もたないからである.



# ハミルトン展開



菱型12面体はハミルトン路を持たないのでハミルトン展開可能ではない。

そもそもハミルトン展開を導入/考察しているのは、重なりに注目するためではなかったのか!?

わき上がる疑問:

以下を満たす自然な多面体はないのか？

1. ハミルトン路をたくさんもつ
2. **重なり**のためにハミルトン展開できない

# ハミルトン展開

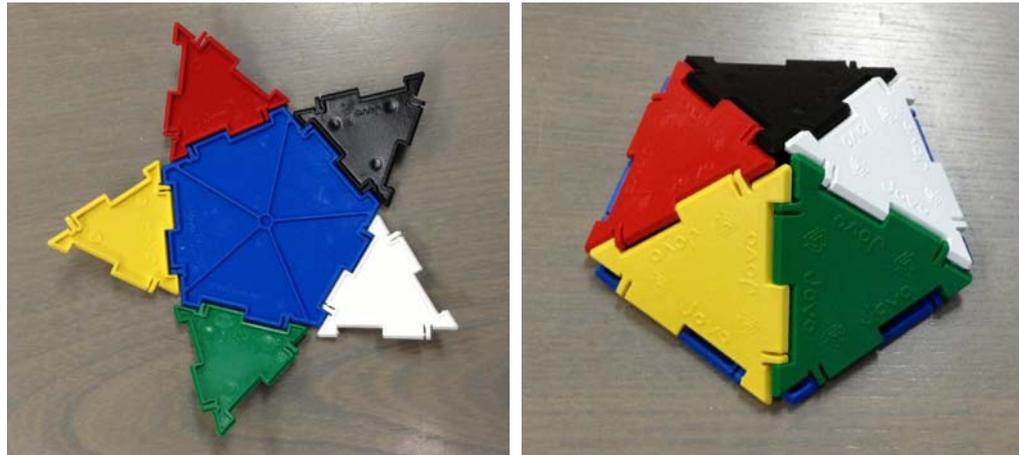
主な結果:

1. 以下を満たす無限個のドームがある
  1. **たくさん(指数関数的)ハミルトン路を持つ**
  2. **どう展開しても必ず重なってしまってハミルトン展開できない!**
2. どんな入れ子角錐台でもハミルトン展開可能.
3. 一般の角錐台がハミルトン展開可能かどうかは, 多項式時間で判定できる.

# ハミルトン展開: 展開できないドーム

ドーム: 以下より構成される凸多面体

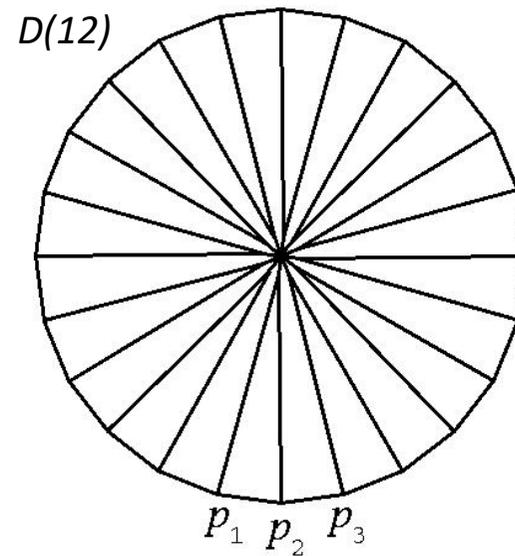
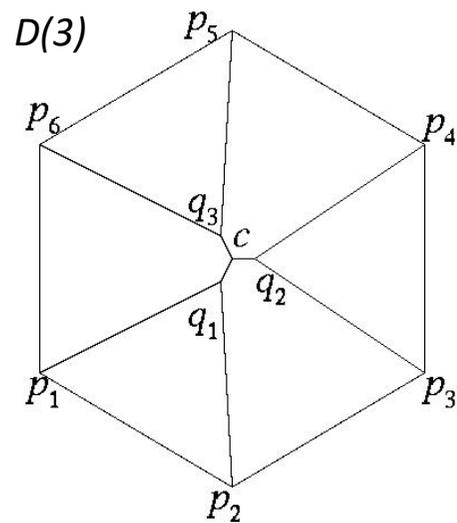
- 一つの底面(凸 $n$ 角形)
- $n$ 枚の側面(凸多角形)
  
- 5角形の底と5枚の側面を持つドームの例:



## 定理2: ハミルトン展開できないドーム

定理2: ハミルトン展開できないドームは無限個存在する.

[証明] 以下で定義されるドーム $D(i)$ は $i \geq 12$ に対してどれも展開できない.

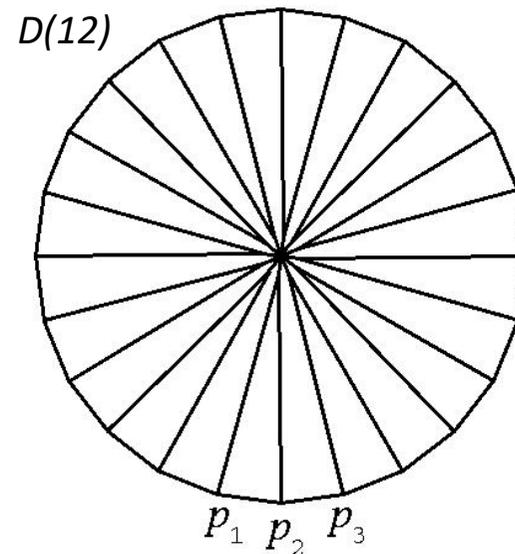
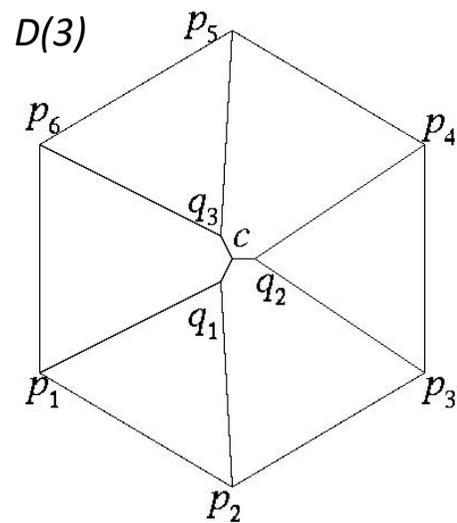


## 定理2: ハミルトン展開できないドーム

[観察1] ハミルトン路 $P$ はたくさん存在する

[観察2] どんな $P$ でも中央の $c$ は1度しか通らない

[観察3] ほとんどの $q_i$  (例外は高々2個) はフラップの先端になる.

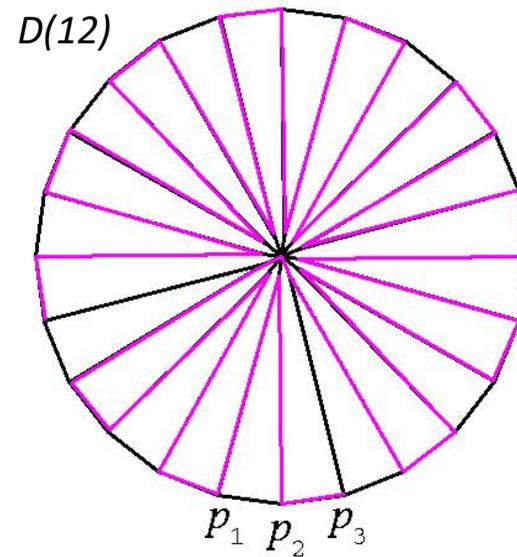
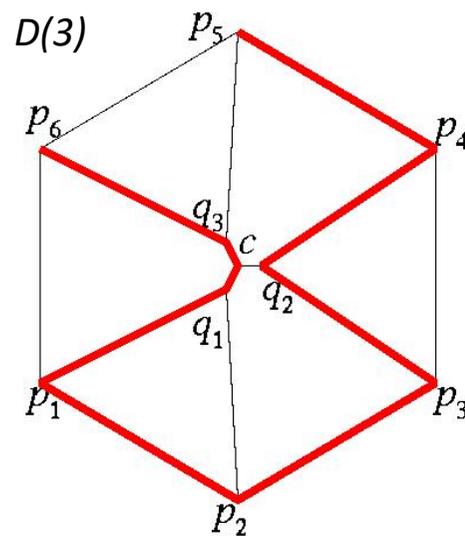


## 定理2: ハミルトン展開できないドーム

[観察1] ハミルトン路 $P$ はたくさん存在する

[観察2] どんな $P$ でも中央の $c$ は1度しか通らない

[観察3] ほとんどの $q_i$  (例外は高々2個) はフラップの先端になる.



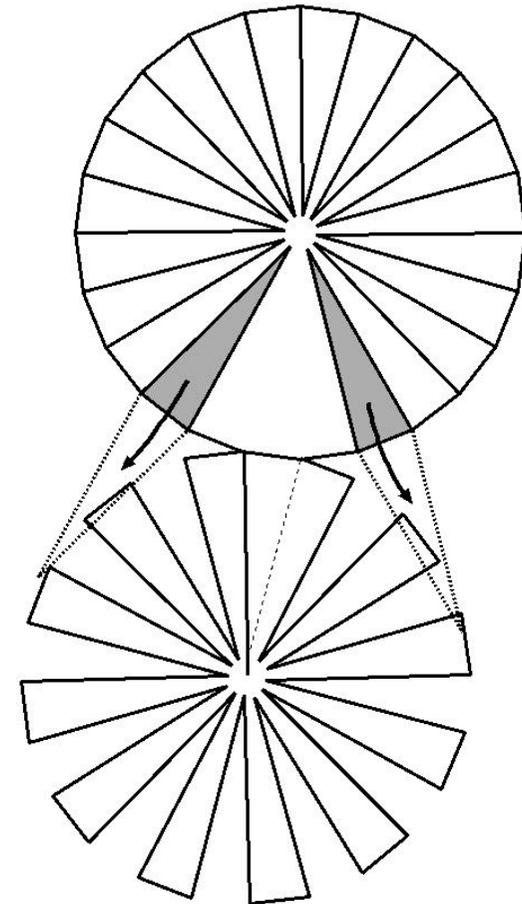
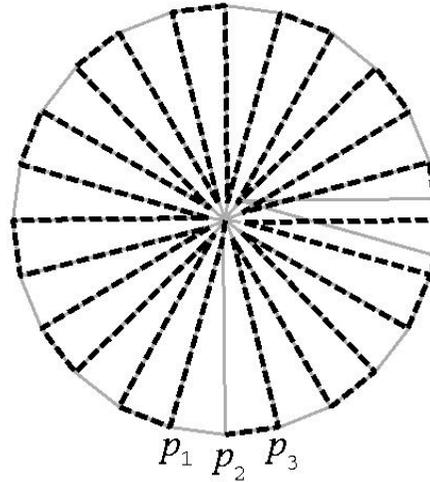
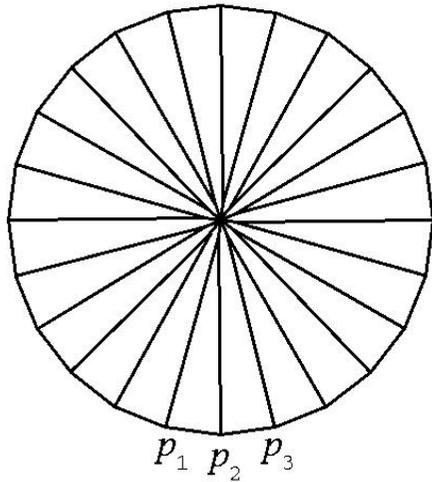
## 定理2: ハミルトン展開できないドーム

[観察1] ハミルトン路 $P$ はたくさん存在する

[観察2] どんな $P$ でも中央の $c$ は1度しか通ら

[観察3] ほとんどの $q_i$  (例外は高々2個) はフ

どんな $i$  12でも, 必ず重なりが発生する!



# ハミルトン展開

主な結果:

1. 以下を満たす無限個のドームがある
  1. **たくさん(指数関数的)ハミルトン路を持つ**
  2. **どう展開しても必ず重なってしまってハミルトン展開できない!**
2. **どんな入れ子角錐台でもハミルトン展開可能.**
3. **一般の角錐台がハミルトン展開可能かどうかは, 多項式時間で判定できる.**

# ハミルトン展開

Main results:

2. Hamiltonian unfoldability of *any nested prismoid*

Th. 4: Any nested prismoid has a  
Hamiltonian unfolding.

3. Poly-time algorithm for Hamiltonian  
unfoldability of *any (general) prismoid*

Th. 5: The number of HPs in a prismoid with  
 $n$  vertices is  $O(n^3)$ .

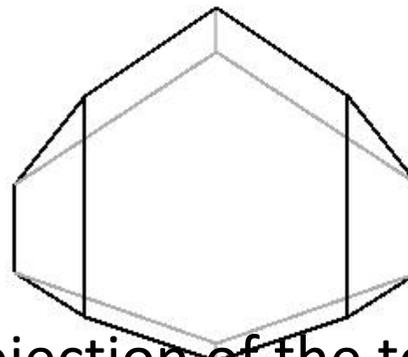
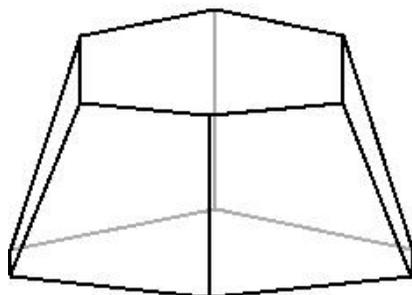


Just count it!

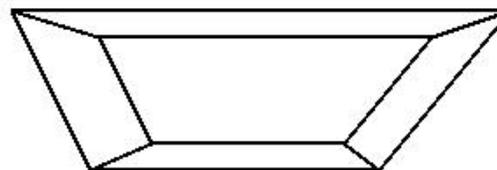
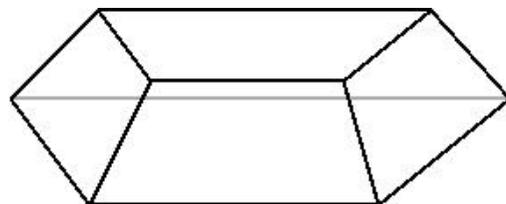
# Prismoid

Prismoid: convex hull of two parallel convex polygons with matching angles

- It has “top” and “bottom,” whose angles match.



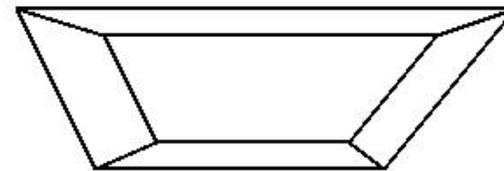
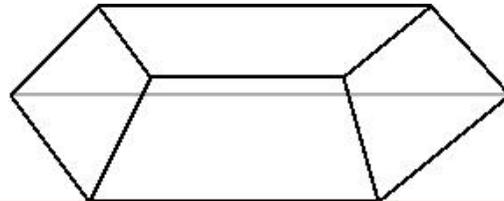
Nested prismoid: orthogonal projection of the top is included in the bottom.



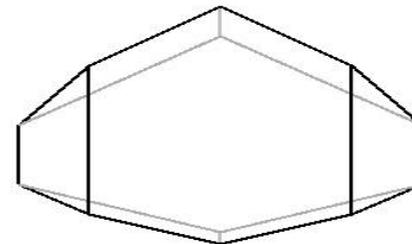
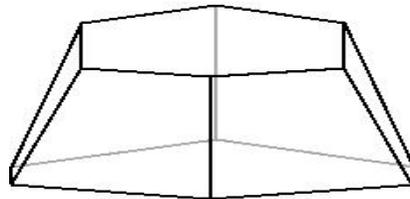
# ハミルトン展開

Main results:

Th. 4: Any nested prismoid has a Hamiltonian unfolding.



Th. 5: The number of HPs in a prismoid with  $n$  vertices is  $O(n^3)$ .

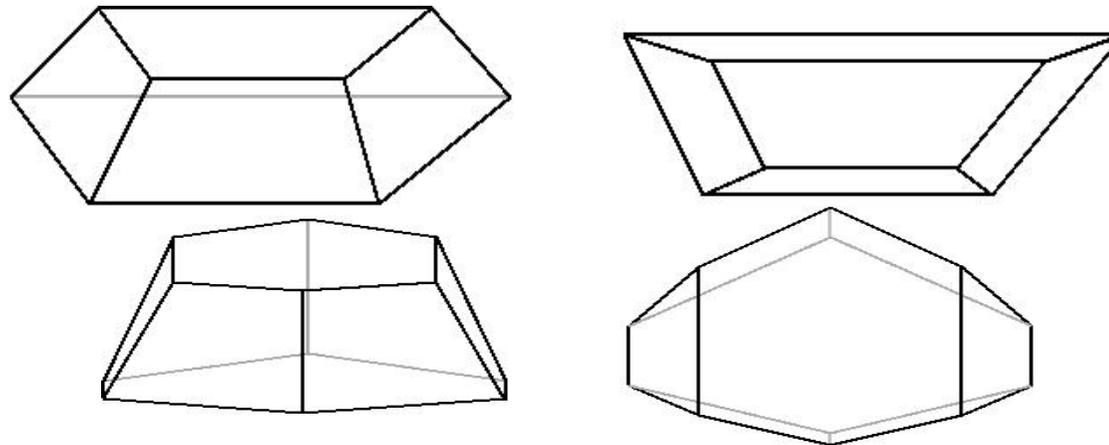


# Related results

*Band* of any prismoid (=without top/bottom) can be unfolded by cutting an edge (**not any edge**).

Nested [Aloupis, et al. 2004/2008]

General [Aloupis 2005](Ph.D Thesis)

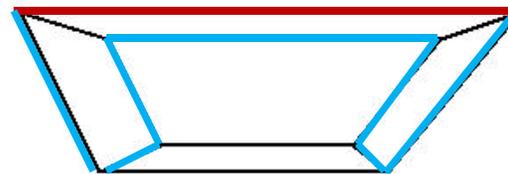
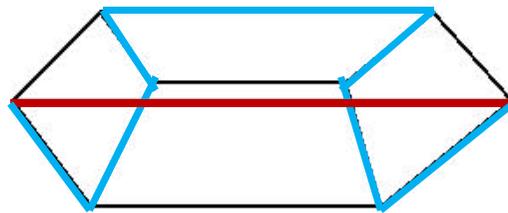


# ハミルトン展開

Th. 4: Any *nested* prismoid has a Hamiltonian unfolding.

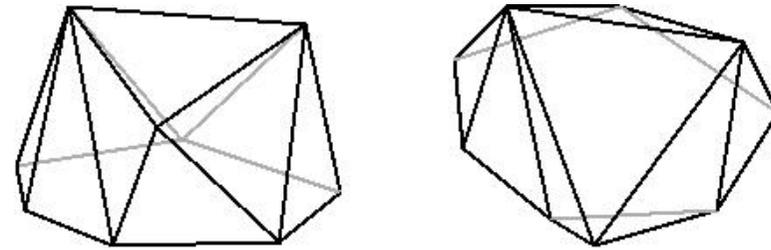
Basic idea:

- ① cut the edge to unfold the band
- ② cut its neighbor edge and around top
- ③ choose suitable edge to attach the band to base
- ④ cut the remaining edges





# まとめ



予想:

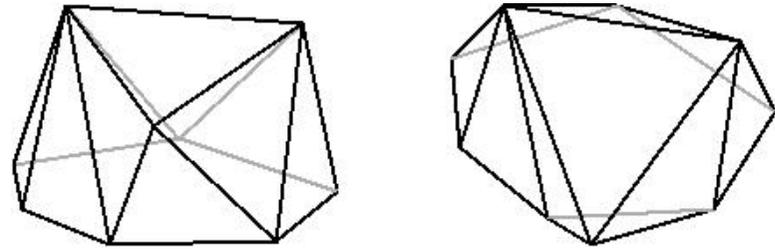
任意の角錐台はハミルトン展開可能?

(側面だけなら展開できる[Aloupis 2005].)

未解決問題(凸多面体の辺展開における最前線):

- 擬角柱: 2枚の平行な凸多角形の凸包
  - 指数的にハミルトン路を持つものがある
  - 今のところ, ハミルトン展開できないものも見つかっていない
  - 「いつでも辺展開できる」ことも証明されていない

# 演習問題



現状をまとめて考えてみよう:

- 展開方法: ハミルトン展開/通常展開
- 立体: 周囲のバンドだけ, 入れ子角錐台, 角錐台, 擬角柱
- 展開可能性
  - 多項式通り/指数通り
  - いつでもできる/わからない