

計算幾何学特論：計算折り紙入門

おまけスライド：パズルの解答・主な展開図・演習問題・未解決問題などをまとめておきました。

上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学系 教授

uehara@jaist.ac.jp

10月11日(水)

14:50-16:20

16:40-18:10

10月12日(木)

13:00-14:30

14:50-16:20

16:40-18:10

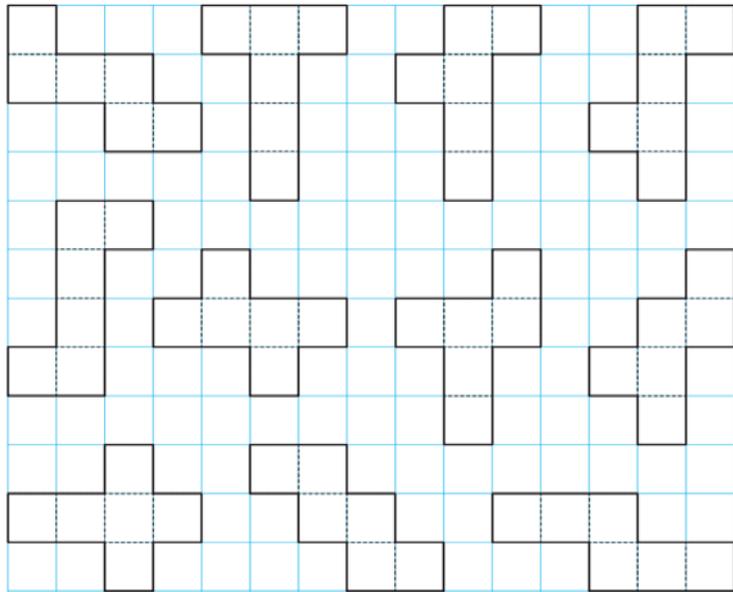
10月13日(金)

13:00-14:30

14:50-16:20

立方体パズル (by 岩井政佳氏)

- 立方体の辺展開は11通りある。



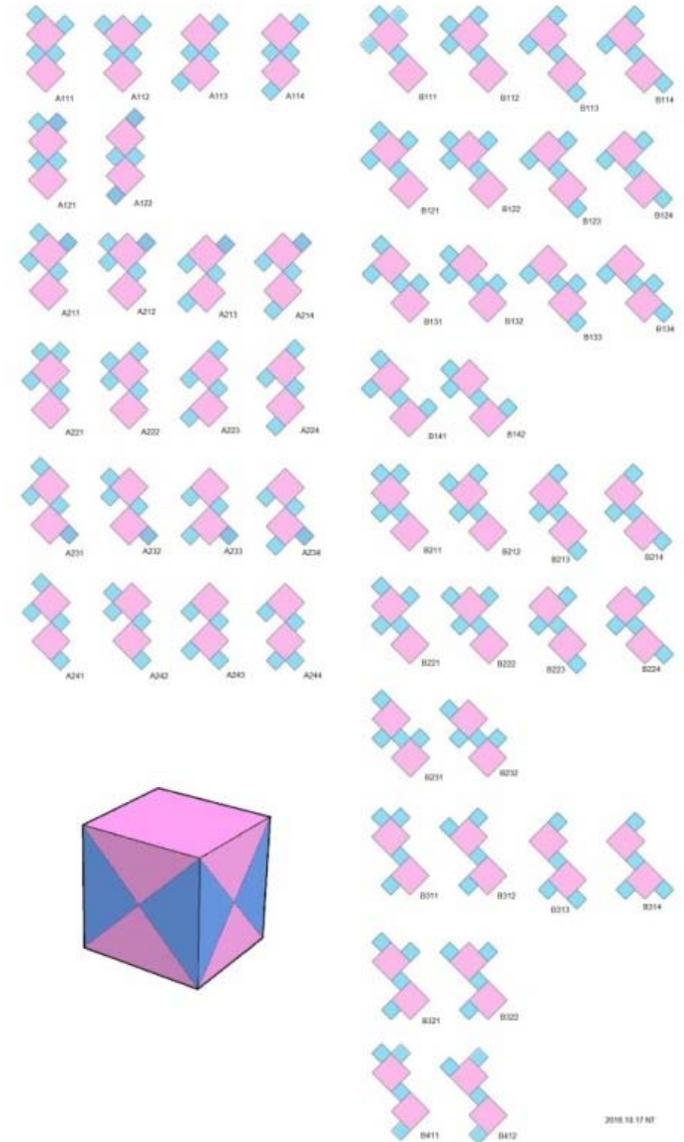
問1: 正方形6個からなる展開図を
これ以外に見つけよ。

(ヒント: すべて同じ大きさでなくてもよい)

問2: すべて同じ大きさの正方形6個から
なる展開図が無限にあることを示せ

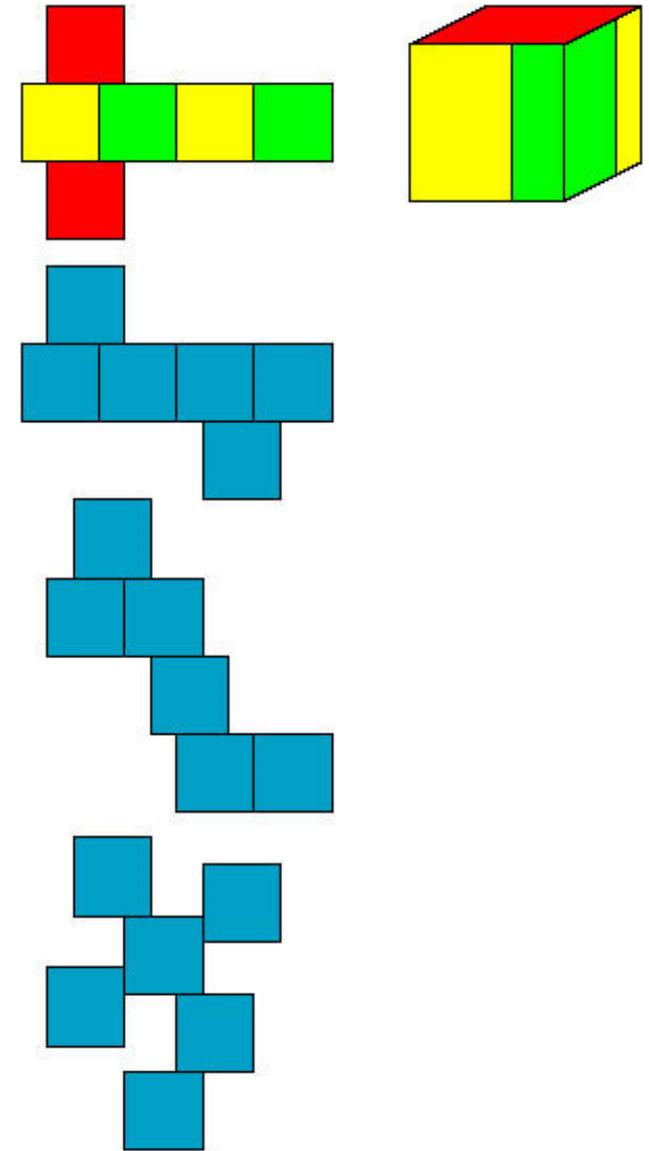
問1の答え

- 解答図は高島直昭氏による。
(<http://www.iwai-masaka.jp/56290.html>)
- こちらは54通り解があるようだ.

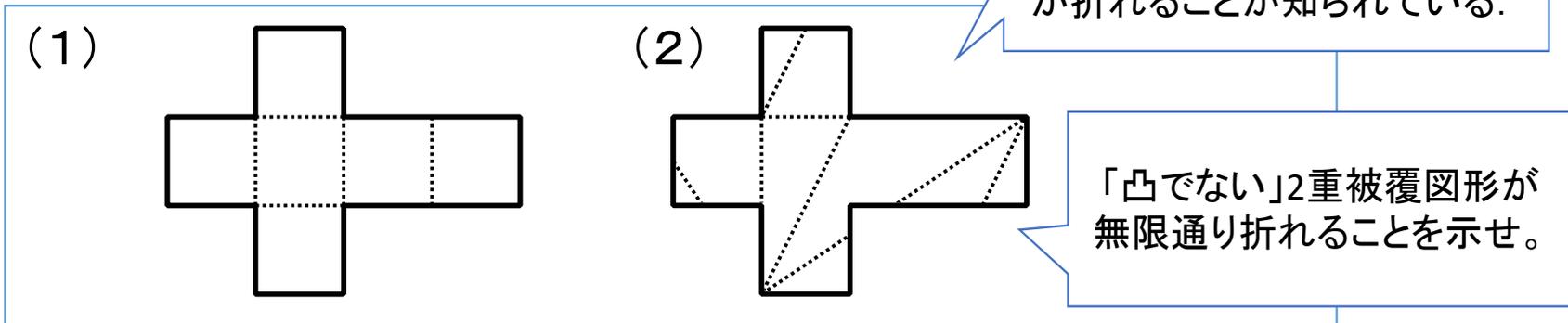


問2の答え

- 解答図は岩井政佳氏による.
(<http://www.iwai-masaka.jp/56291.html>)
- こちらは実数と同じ濃度, つまり非可算無限個の解があることに注意しよう.



演習問題: 何が折れるでしょう?



立方体の辺展開図を一つ選び、どのくらい多くの凸立体が折れるか、試してみよう。何かわかることはあるか?

演習問題: どんな鋭角3角形からでも4単面体が折れることを示せ。どんな3角形でもタイリングできるが、それとの関係はどうか? 鈍角3角形ではどうなるか? どんな4角形でも(凸でなくても!)タイリングできるが、これから立体は折れるか? 折れないとすればなぜか?

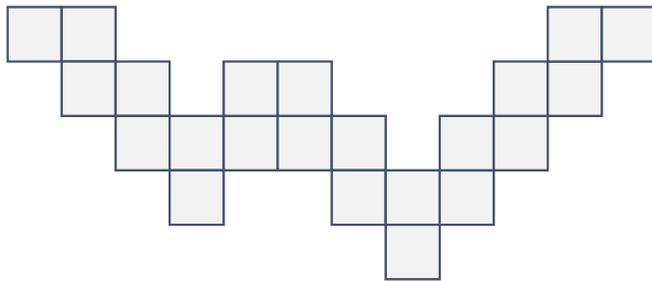
演習問題: 正多面体の一般展開図の最短カットの長さは？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
 - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
 - 最適解を見つけるのは、なんとかかなると思う
 - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
 - 最適解を見つけるのはちょっと大変
- 以下の文献に解が載っています.
J. Akiyama, G. Nakamura, X. Chen, and M.-J. Ruiz.
Minimum Perimeter Developments of the Platonic Solids,
Thai J. or Math., 9(3), pp. 461-487, 2011.

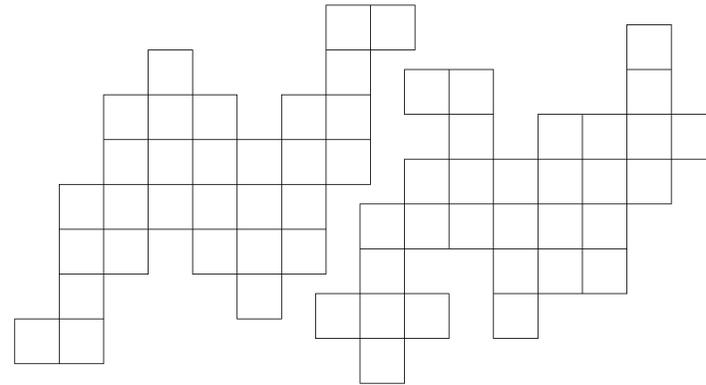
演習問題:「箱」を折る単位正方形からなる展開図を構成するとき、暗に展開図の中には切込みが入ってないと仮定してもよい。実は一般性を失うことなく、これを仮定してよい。なぜか？

おまけパズル

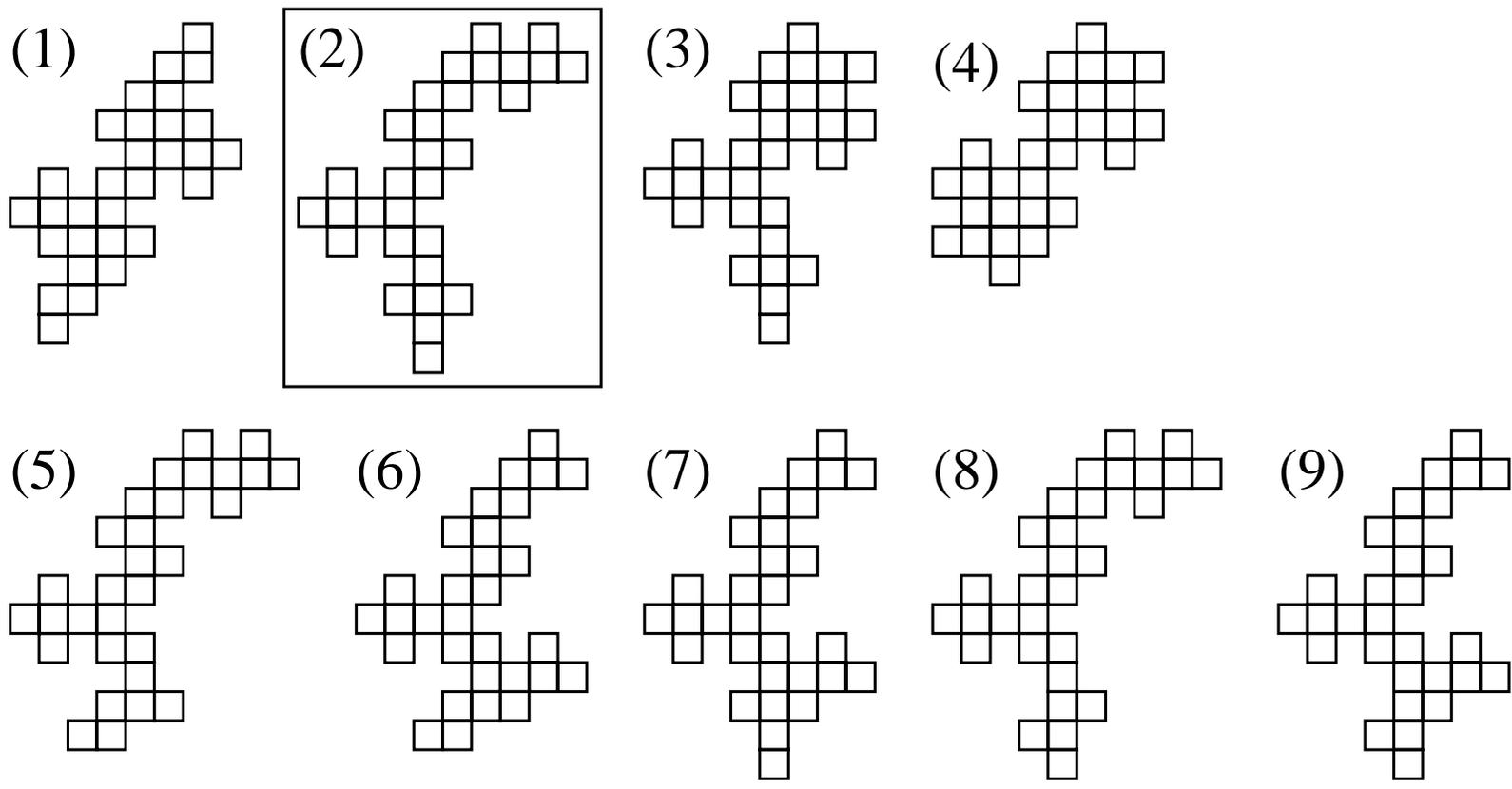
3通りの箱を折れ。
ただし一つはちょっとずるい。



2通りの箱を折れ。
ただし斜めに折ることもある。



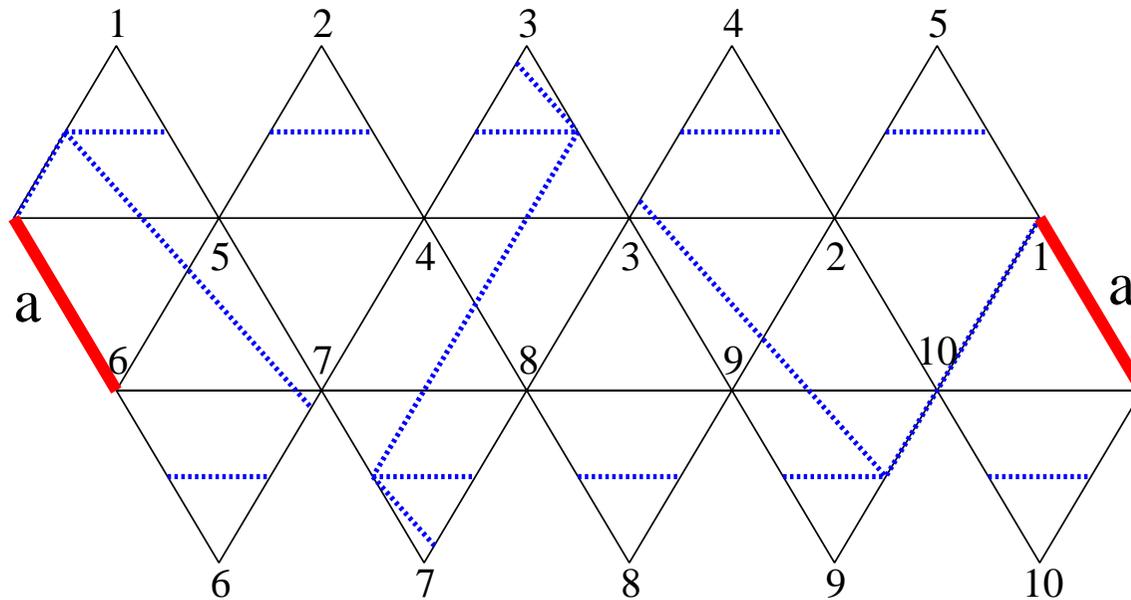
おまけパズル続き: 3種類の箱を折れ。ただし(2)はちょっと特別であり、3種類の箱を4通りの方法で折れる。すべて見つけてほしい。



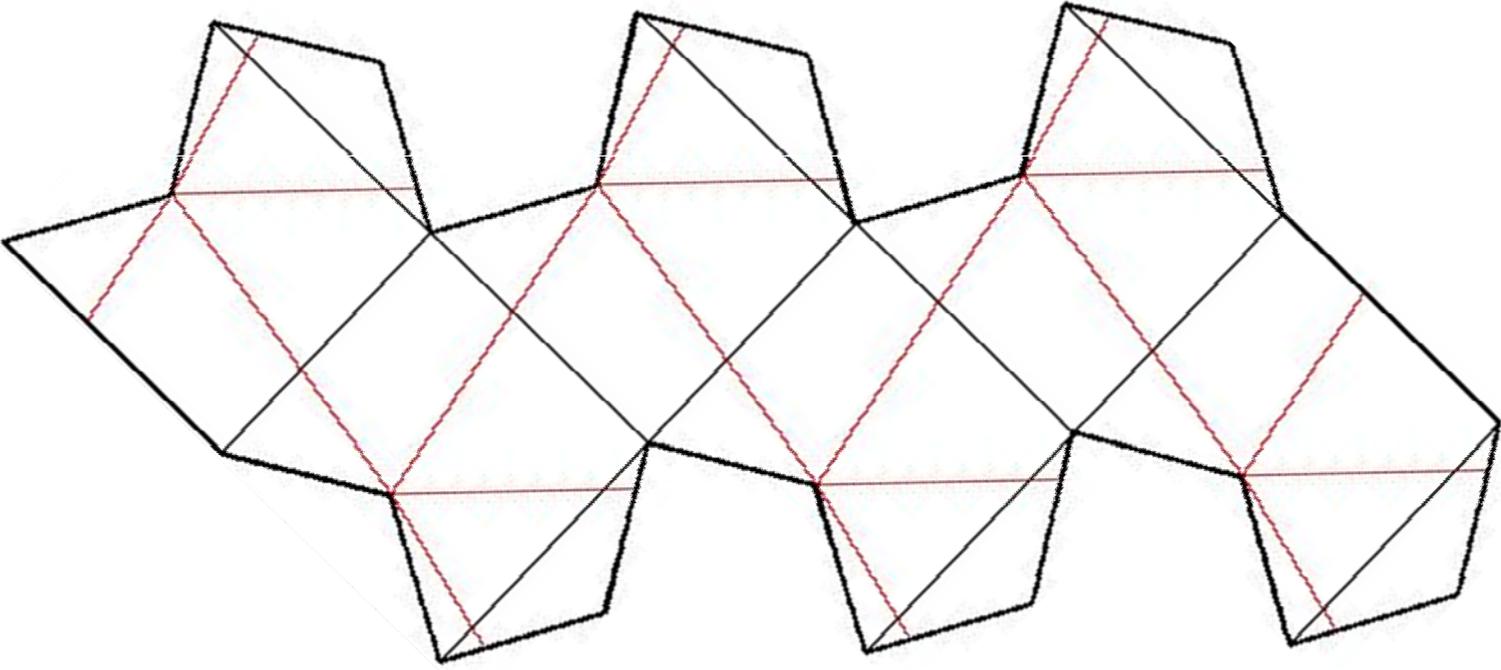
演習問題: 以下の共通の展開図を考えてみよ。どのくらい正4面体に近いか検討せよ。

- 立方体 4単面体
- 八面体 4単面体

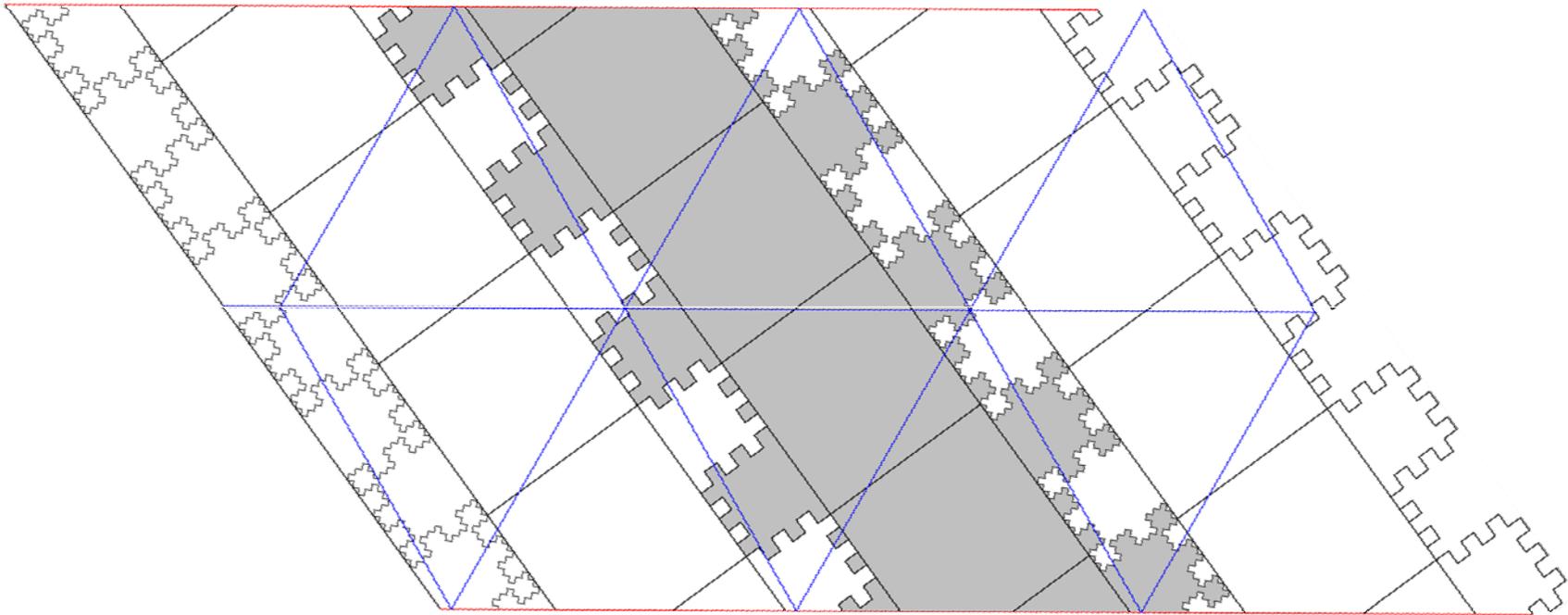
ヒント: 正20面体と4単面体の共通の展開図(上原2010)



おまけ展開図: 立方体と8面体の共通の展開図(白川2010)



おまけ展開図: 立方体と、ほぼ正4面体が折れる展開図

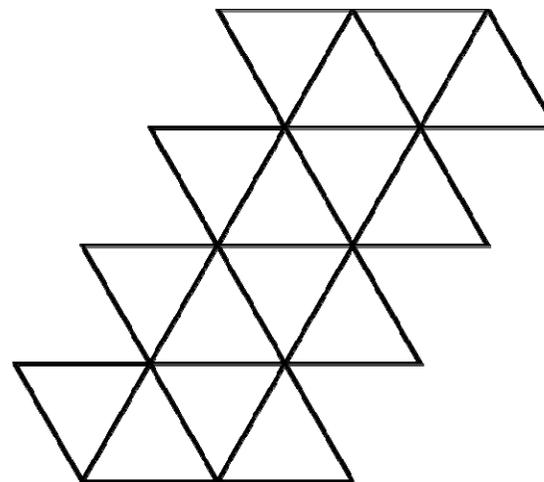
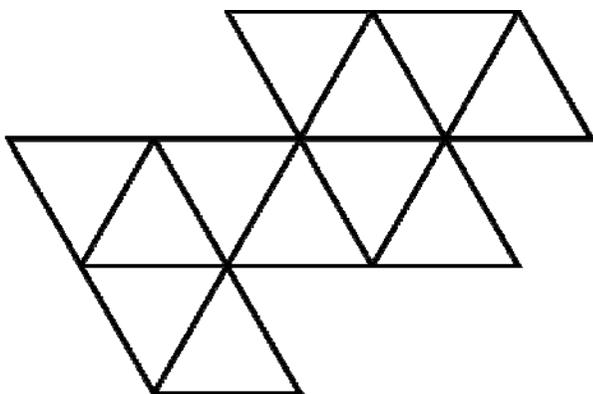
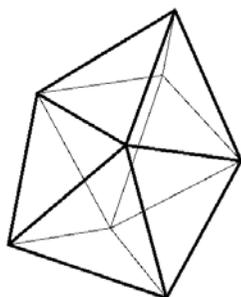


未解決問題: 正多面体の間の共通の展開図

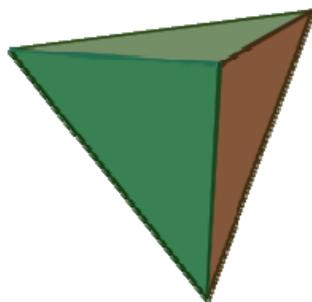
J84

正四面体vsジョンソン立体

J17



2通りの折り方で
正四面体が折れる
5個の解のひとつ



3通りの折り方で
正四面体が折れる
唯一の展開図

研究問題: 長さ $n+1$ の紙に等間隔に n 個の折り目をつけたい。紙は重ねて折ることができて、最後に折られた方向に折り目が残る。余計な折り目はつけてはいけない。

1. どんな折り目でもよいとき、折る回数の最小値はいくつか。
2. 山折りと谷折りのパターンが与えられたとき、そのパターンを折り目としてつける、回数の少ない折り方を考えよ。

研究問題: 長さ $n+1$ の紙を長さ1に折りたたむ。

1. 上記の方法は何通りあるか？(切手折り問題)
2. 山折りと谷折りのパターンが与えられたとき、そのパターンで折りたたむ方法がもっとも多いパターンの特徴とは？

演習問題(研究課題)

- 演習問題

- 折り紙の「複雑さ」を評価するための指標を提案せよ。

例: 作業スペース

- 上記の指標を吟味せよ。

例: 1次元の折り紙(パイプを曲げるなど)では意味があるが、2次元の正方形だと、だんだん小さくなる一方なので、あまりよくない。

野望: チューリング機械モデルにおける「time-space trade off」に相当するような複雑さの指標を提案したい!

未解決問題

- じゃばら折り
 - 上界 $O(\log^2 n)$ と下界 $\Omega(\log^2 n / \log \log n)$ を近づける
- 「**ほぼすべての**パターンは難しい」と言うけれど...
 - $(cn/\log n)$ 回の折りが本当に必要な具体的な M/V パターンの構成方法はわかっていない
- 紙を開くコストは無視しているけど...
 - 「折る回数」+「開く回数」を最小化するとよいかも
 - (たかだか折った回数しか開けないけど...)
- **一般の間隔**や**2次元**への拡張も...

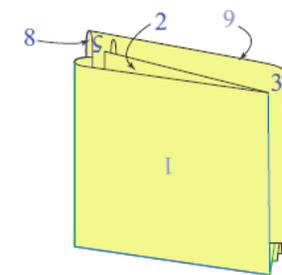
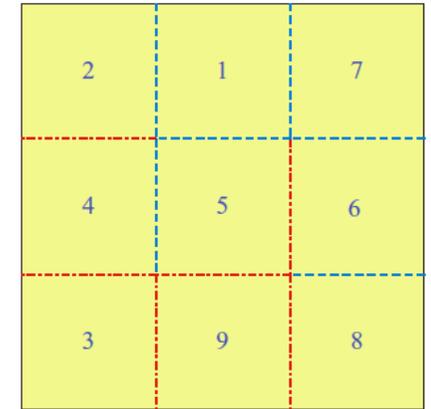
切手折り問題の拡張

2次元への拡張～地図折り問題

入力: 2次元の山折り/谷折りのパターン

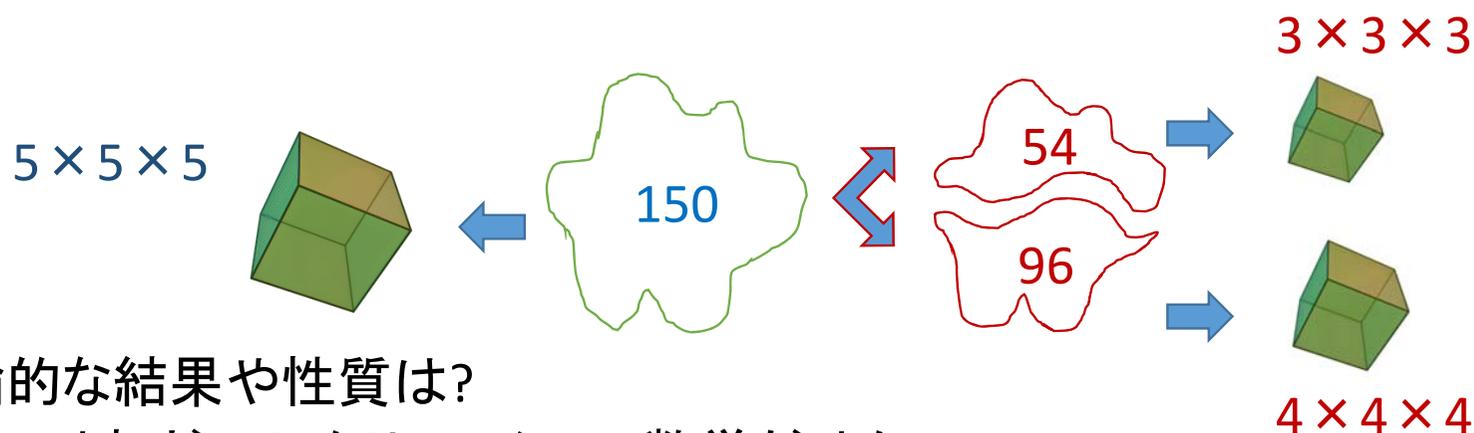
出力: 1×1 に「折り畳んだ状態」が存在するか？

- $m \times n$ の地図折り問題の困難性は未解決
- $2 \times n$ の地図折り問題の多項式時間アルゴリズムは [Morgan 2012]で与えられたが... $O(n^9)$ 時間
- すごく難しい例[演習？]
 - $2 \times n$ で折れない最小のパターンを見つけよう。



演習問題

- RegularなRep-cubeがある自然数とない自然数の分類
 1. 「ない」ものを増やす: 3, 6, ... (個々に議論してみる)
 2. 「ある」ものを増やす: 現物を見つける (試行錯誤 + α)
- 正則でないものの現物や構成法をもっと探す
- ピタゴラスの3角形の5ピースは減らせるか? 特に2ピースにできないか?



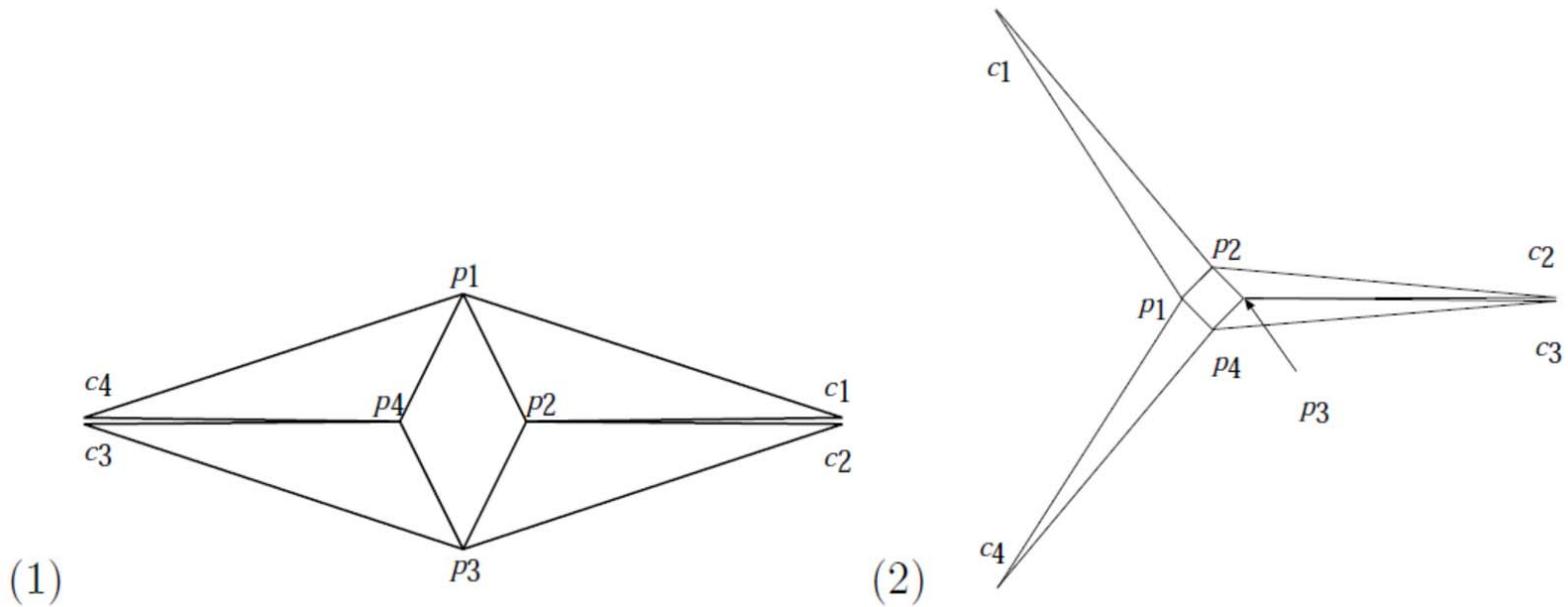
発展課題

- もっともっと理論的な結果や性質は?
- 応用があるといいけれど ... レクリエーション数学だけか?

演習課題

(一般化)ピラミッド問題

- 凸ピラミッドよりも凹ピラミッドの方が体積が大きいものを他に探そう



演習問題

「最先端」の現状を調べてまとめて考えてみよう:

- 展開方法: ハミルトン展開/通常展開
- 立体: 周囲のバンドだけ, 入れ子角錐台, 角錐台, 擬角柱
- 展開可能性
 - 多項式通り/指数通り
 - いつでもできる/いつでもできるわけではない/わからない

