

じゃばら折りの複雑さに 関する研究

1. 上原隆平(北陸先端科学技術大学院大学)
 2. 伊藤剛志(McGill University)
 3. 清見礼(北陸先端科学技術大学院大学)
 4. 今堀慎治(東京大学)
 5. Erik Demaine (MIT), Martin Demaine (MIT),
5. Stefan Langerman(ULB), Jean Cardinal(ULB)
 6. 宇野毅明(国立情報学研究所)



じゃばら折りの複雑さに関する研究

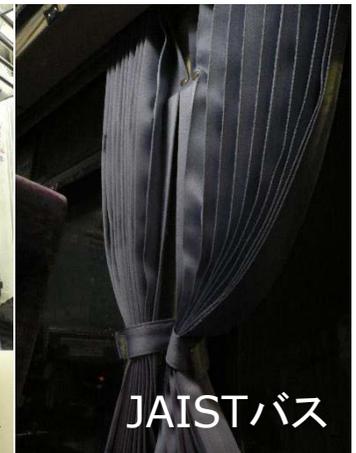
• じゃばら折りとは...



- 山折りと谷折りを等間隔で交互に繰り返した折り
- 基本的な折りの一つ
- 応用もたくさんある

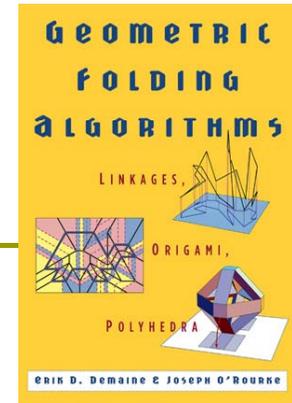


蒸す

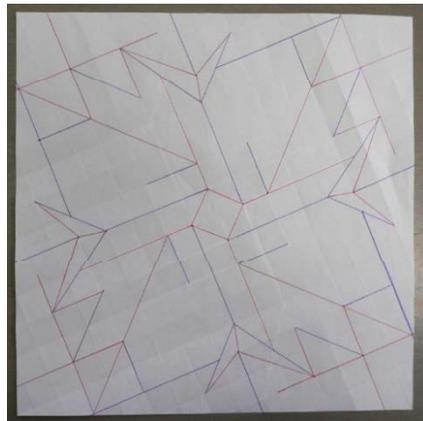


はじめに

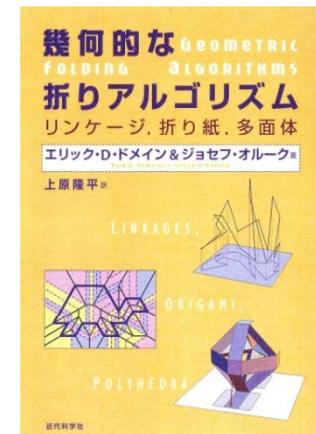
Erik D. Demaine,
Joseph O'Rourke,
2007, Cambridge



□ コンピュータサイエンスとしての折り紙とは...



川崎ローズ



上原訳、
2009/11/13
近代科学社

■ 数学的には「解」の存在がわかればOK.

- 第4回折り紙の科学・数学・教育研究集会
- 「折り紙の数理に関する提言」川崎敏和

■ CS的には折り紙製作の「手順・手数」にこだわる

- 効率のよい手順... 良いアルゴリズム
- 難しさの指標... 計算量理論

純粹に手順・手数だけが問題になるテーマ...

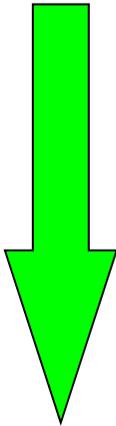
n	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000
$\log n$	3.3	6.6	10.0	13.2	16.6	19.9	23.3

こんな n に対しても解が存在することはあたりまえ。
純粋に手順だけを考える問題

□ 1Dのじゃばら折り



モデル: 紙の厚みは0



- 素朴な方法: n 回折ればいい。
- n 個の折り目をつけるには(どんな折り目でも) $\log n$ 回は折らないとだめ

[Why?]

- 毎回半分に折る方法が最小。
- このとき " $\log n$ 回" 折ると n 個の折り目ができる
- n が大きいと $\log n \lllll n$ になる



- もっと効率よく折れないの?
 - 重ねて折るといいのでは...?
- 山谷のパターンを変えるとどうなるの?
 - 典型的なパターンとは...?

• じゃばら折りの複雑さ

[最大の疑問] n 個の折り目を持つじゃばら折りは n 回折らないと作れないのだろうか??

1. 答え: No!!
 - (じゃばらに限らず)どんな折り目でも $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば作れる!!
 2. じゃばらは cn 回折らないと作れないの?
 - No!! 現在の記録... $c (\log n)^2$
- どんな山谷パターンでも(「半分折りを繰り返す」よりも早くは折れないため) $\lceil \log n \rceil$ 回は必要。
 - じゃばら折りに限定すれば、 $\Omega((\log n)^2 / \log \log n)$ 回は折らなければならないという下界が得られたので、上記はほぼ最適。(今日は省略)

• じゃばら折りの複雑さ

[もう一つの疑問] どんな n 個の折り目の列なら簡単に折れるのだろうか??

1. 悪いニュース:
 - ほぼすべての山谷パターンは $n / (3 + \log n)$ 回は折らないと作れない!!
ほとんどのパターンは劇的に早く折ることはできない!!
2. 良いニュース:
 - じゃばら折りは $(\log n)^2$ 回で折れるので) 例外的に簡単なパターン
 - どんなパターンでも $4n / \log n$ 回で折るアルゴリズムが存在する。
理論的にほぼ最適な折りアルゴリズムを構成した
3. 解けていない問題:
 - 具体的にどんなパターンが難しいのかわからない...

• 一般のじゃばら折り問題

入力: 長さ $n+1$ の紙と n 個の M, V の列 s

出力: s にしたがって等間隔で折り目がついた紙

基本操作

1. ある点で{すべての・何枚かの}紙をまとめて{山折り・谷折り}にする(単純折り)
2. 折られている部分を{すべて・巻き戻し操作で・好きなところを}開く(単純折りの逆操作)

お約束

1. それぞれの折り線は「最後に折られた方向」を記録している
2. 紙は折り線以外のところは剛体なので折ることができない

ゴール: 折り操作の回数の最小化

注意: 開く操作のコストは気にしない

おもしろいところ

- 折るたびに裏表ができる
- 奇数点と偶数点は重ねられない

• じゃばら折りの複雑さ

□ 今日のお話(の前半)

(済) どんなパターンも n 回で折れる

(済) どんなパターンも $\log n$ 回未満では折れない

1. どんな山折り・谷折りパターンでも $n/2 + \log n$ 回で折ることができる
2. ほとんどすべての山谷パターンは $n / \log n$ 回くらいは折らないと作れない
3. じゃばら折りは $(\log n)^2$ くらいで折ることができる
 - (じゃばら折りは $\log n / \log \log n$ 回折らないとだめ)
4. どんな山折り・谷折りパターンでも $4n / \log n$ 回くらいで折ることができる

1. どんなパターンでも...

- どんな山谷パターンでも $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log n \rceil$ 回折れば十分
 1. (中途半端な長さの場合は $2^k - 1$ とみなす; 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, ...)
 2. 毎回中央の折り目を見て、
 - 山/谷の多い方を多数決で選んで折る(裏返っている面に注意)
 3. 全部開く
 4. 正しく折られてない折り線を一つずつ直す

- ステップ 2 で $\log n$ 回折って、少なくとも半分は正しく折れる
- ステップ 4 ではたかだか $n/2$ 回しか折らない



2. ほとんどすべてのパターンは...

- ほとんどすべての山谷パターンは $n / \log n$ 回くらいは折らないと作れない

(証明のロジックのアイデアだけ)

- ① n 個の山谷のパターンは何種類あるのだろう？
(山/谷)の割り当てが n 箇所、対称性を考えると $2^{n/4}$ 通り
- ② 高々 k 回折ることで作れるパターンは何種類あるのだろう？
ちょっと面倒...紙を開くときのモデルによって変わるし...
- ③ ここで k が小さいと ② \ll ① である。つまり少なくとも ② \geq ① でないと折れないパターンが存在する
- ④ 計算すると、 $k = n / (3 \log n)$ 程度では ② \llllll ① である。



3. じゃばらを $(\log n)^2$ くらいで折る

障害: 「裏表」と「じゃばら折り」を同時に考えるのはムリ!!

アイデア:

「じゃばら折り」と「全部山折り」は問題としてはだいたい同じ

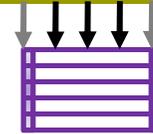
以下の方法を使えばよい

1. 奇数番目だけ全部山折りにする
2. 広げて裏返す
3. 偶数番目だけ全部山折りにする

「全部山折りアルゴリズム」
を作ればOK

全部山折り

3. ~~じゃばら~~を $(\log n)^2$ くらいで折る



ステップ1;

1. 全体の長さが[3]になるように「半分ずつ」繰り返し折る ($\log n - 2$ 回)
2. 3回山折りにする ([MMM])
3. 開く(vMMMvvvvvMMMvvvvvMMMvvvvvMMMvvvvv...)

ステップ2;

1. vvvvv が重なるように「半分ずつ」繰り返し折る ($\log n - 3$ 回) [MvvvvvM]
2. 5回山折りにして [MMMMMM] を開く
3. vMvMMMMMMvMvvvvvMvMMMMMMvMvvvvvMvM

ステップ3; 以下同様に vvvvv の連続が一つになるまで折る

vMvMMMvMMMvMMMMMMvMMMvMMMvMvvvvvMvM

ステップ4; 最後に残ったとびとびの v を全部山折りにする

- ステップ2~3の繰り返しの回数はほぼ $\log n$
- ステップ4で残っている v の数はほぼ $\log n$

トータルの折り回数は
ほぼ $(\log n)^2$

4. 任意のパターンを $cn/\log n$ 回で折る

準備;

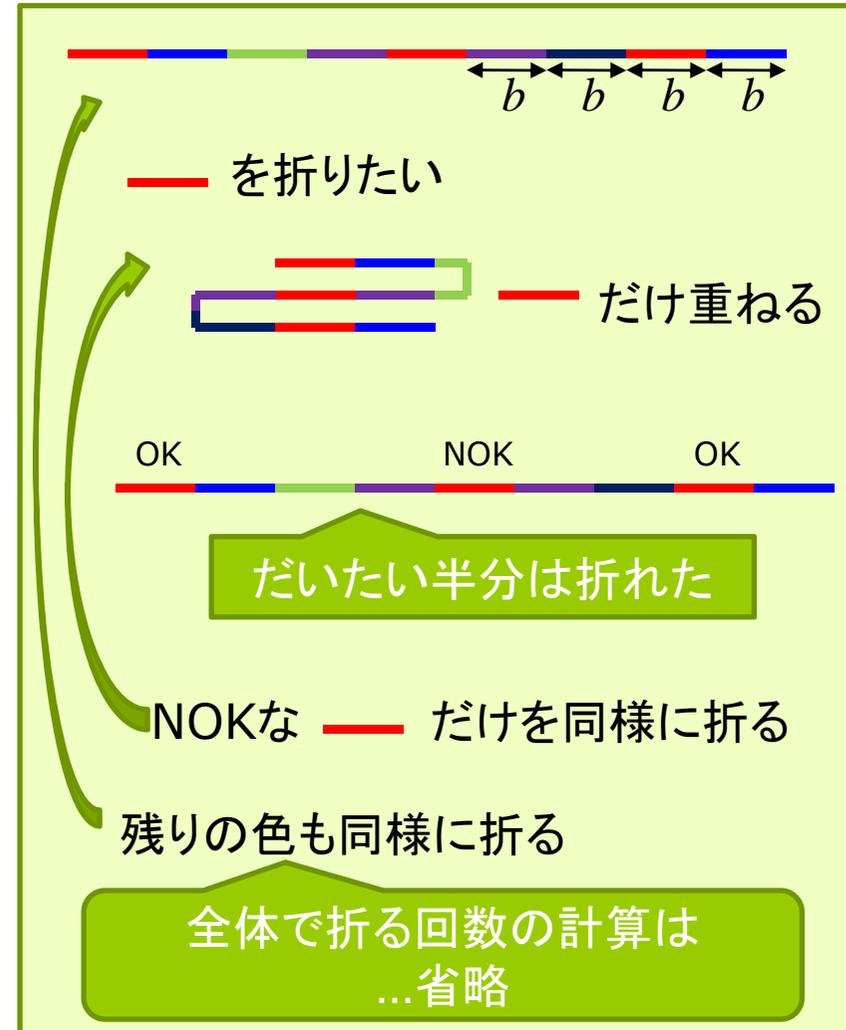
n に合わせて上手に選ぶ

- 全体を大きさ b のブロック毎に分割して考える

1. 一つの b は簡単に折れる
2. b の種類は多くない

本体;

- それぞれの b ごとに
 1. 同じ b たちを重ねて折る
 2. じゃばらと同様に裏返っている部分を順番に直す
- 重ねるための折り目を適宜直す



• 未解決問題

- じゃばら折り
 - 上界($O((\log n)^2)$)と下界($\Omega((\log n)^2/\log \log n)$)を近づける
- 「ほとんどのパターン」は難しいと言うけれど...
 - $(cn/\log n)$ 回折らないと作れない具体的な山谷パターンは不明
- 「開くコスト」を考えるモデルは...?
 - 「折る回数」+「開く回数」の最小化

• じゃばら折りの複雑さ...?

□ 通常の計算モデルにおける資源

1. 時間
2. 領域

□ 折り紙における資源

1. 時間に対応するもの...折りの回数
2. 領域に対応するもの...???

折りたたまれた紙の折り目に挟まった紙は少ない方がよい

紙のストレス =
それぞれの折り目に
挟まった他の紙の枚数

New open problem

ストレスが0である必要十分条件は、
パターンがじゃばら折りであること。

□ Least **stress** folding problem

Input: Paper of length $n+1$ and $s \in \{M, V\}^n$

Output: Creased paper according to s

Goal: Find a “good” folded state with few **stress**

- At each crease, the number of papers between the papers hinged at the crease is **stress**.
- Two minimization problems; max/average (total)
- A few facts;
 - Solutions of {min max} and {min average} are different for a crease pattern.
 - exponential combination for a crease pattern.
 - (I wonder poly-time solvable, but not so easy.)

Least stress folding problem

- 以下の単純な $O(2^n n! n)$ 時間アルゴリズムで $n=11$ までチェックした ($n=11$ で約66時間, $n=12$ で100日?):
 - for each pattern $p=00\dots 0\sim 11\dots 1$ s.t. canonical with respect to "reverse" and "inverse" (578/2048)
 - $(1, \dots, n)$ の順列を1つ生成する
 - p に合致しているかどうかチェック
 - (合致する順列の数/minmaxな順列の数とminmax値/minaveな順列の数とminave値)をそれぞれ記録
 - 順列とpatternが合致する必要十分条件:
 - 折り目 i における0/1と紙 $i, i+1$ の前後関係が一致(i のパリティにより反転することに注意)
 - 奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない

Least stress folding problem

- 未解決問題:
 - そもそも多項式時間で解けるのか?
 - NP 困難?
 - 多項式時間で解ける?
 - 高速列挙
 - 全列挙はメモリを $O(2^n)$ くらい使うと現在の $O(2^n n! n)$ から $O(n!n)$ までは即座に可能

Least stress folding problem

- 未解決問題:
 - n ビットに対する平均的なふるまいとは?
 - これが多項式でおさえられるかどうか、興味深い
 - Yes: 単純なアルゴリズムでも実用的
 - No: 困難な問題であろうと予想される



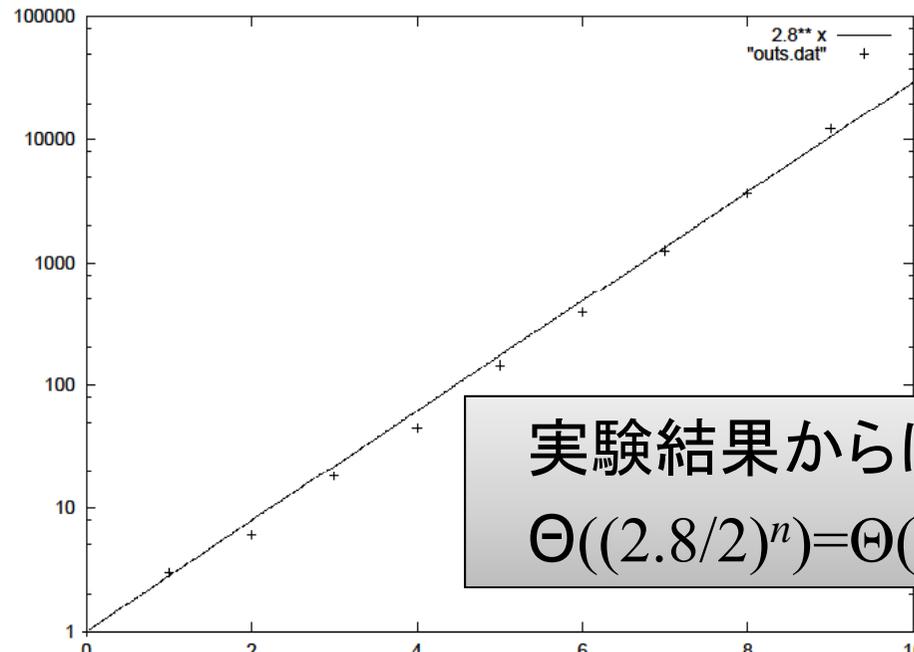
おそらくNo!

Least stress folding problem

□ 未解決問題:

■ 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の上界は...

- おおざっぱな見積もりでは $n! \sim O(2^{n \log n})$ 通り
- 「折り目が入れ子」条件から、 $O(4^n)$ 通りまで改善
- ✿ $n=11$ までの実験的な結果では $\Theta(2.8^n)$ 通り



実験結果からは平均的には
 $\Theta((2.8/2)^n) = \Theta(1.4^n)$ 通り程度

Least stress folding problem

□ 未解決問題:

■ 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の上界は...

● 「折り目が入れ子」条件から、 $O(4^n)$ 通りまで改善

● $n=11$ までの実験的な結果では $\Theta(2.8^n)$ 通り

● 平均的なパターンは $\Theta(1.4^n)$ 通りの折り方をもつ？

● それならば...

□ 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の下界がある $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega((2+\varepsilon)^n)$ であることを示したい!!



Least stress folding problem

□ 未解決問題:

- n ビットに対する平均的なふるまいとは？
 - 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の上界は...
 - 「折り目が入れ子」条件から、 $O(4^n)$ 通りまで改善

[証明] 順列とpatternが合致する必要条件: 奇数折り目と偶数折り目がそれぞれ入れ子状になっていなければならない



Least stress folding problem

□ 未解決問題:

■ n ビットに対する平均的なふるまいとは？

□ 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の上界は...

□ 長さ n の紙の「可能な折り方」の個数の下界がある $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega((2+\varepsilon)^n)$ であることを示したい!!